Opleiding tot leraar.

# EUCLIDES

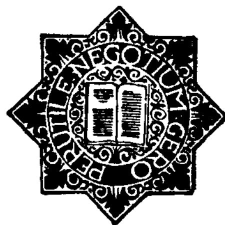
## TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES




9e JAARGANG 1932/33, Nr. 1



P. NOORDHOFF — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor inteekenaars op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en Christiaan Huygens f 5.—.

**Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken** verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens" (*f* 10.—) zijn ingeteekend, betalen *f* 5.—.

**Artikelen** ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

**Aan de schrijvers** van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

**Boeken ter bespreking** en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

---

INHOUD.



---

N.V. P. NOORDHOFF'S
UITGEVERSZAAK
GRONINGEN

GRONINGEN, d. p.

HERHAALDELIJK bereiken ons vragen van nieuwe en ook van oude inteekenaars op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, op Christiaan Huygens en op Euclides om werken, waarop bij verschijning korting werd gegeven, alsnog tegen verminderden prijs te kunnen krijgen.

Ongetwijfeld zullen velen dezelfde wenschen koesteren, zonder die kenbaar te maken.

Bij de aanvang van de nieuwe Jaargang van deze tijdschriften, alsmede van het Nieuw Archief stellen onderteekenden de gelegenheid daartoe open voor alle inteekenaars. Men gelieve van **bijgaande bestelkaart** gebruik te maken en het bedrag tegelijk over te maken.

Andere werken, vermeld in onze Catalogus „C" en niet vermeld onder de premies, worden met 10 % korting geleverd.

Deze aanbieding blijft gelden tot 1 Januari 1933 voor Indië en het buitenland tot 1 Maart 1933

**doch is alleen geldig, bij inzending van bijgaande bestelkaart.**

In INDIË aan Drs. F. C. NOORDHOFF p/a Kolff & Co., Batavia-C.

Hoogachtend,

N.V. P. NOORDHOFF'S UITGEVERSZAAK

Opleiders L. O. en K I en
Candidaten voor die acten

worden in het bijzonder gewezen op de verzamelwerken:

# TIEN JAARGANGEN

## NIEUW TIJDSCHRIFT VOOR WISKUNDE I

Stof, verzameld voor het examen L.O. — 303 bladzijden.

# TIEN JAARGANGEN

## NIEUW TIJDSCHRIFT VOOR WISKUNDE II

Stof, verzameld voor het examen K I — 324 bladzijden.

à *f* **4.50** per deel.

**Iedere bladzijde is van direct belang voor het examen.**

INHOUD VAN DEEL I.

H. G. A. Verkaart, De betrekkingen tusschen de wortels en de coëfficiënten eener vierkantsvergelijking.
P. Wijdenes, Logarithmen van negatieve getallen.
H. G. A. Verkaart, Over eenige ongelijkheden tusschen pos. grootheden.
C. A. Cikot, Over het bepalen van maxima en minima van functies door middel van identiteiten.
H. G. A. Verkaart, Over getallen, waarvan de som der kwadraten weer een vierkant is.
C. Volker, Over machten, machtlijnen, enz.
C. A. Cikot, De lijn van Wallace (Simson).
Dr. A. C. v. Rijn v. Alkemade, De cirkel van Feuerbach (negenpuntscirkel) en de gelijkvormigheids-transformatie.
H. G. A. Verkaart, Onderzoek naar eenige maxima en minima in den vlakken driehoek.
H. G. A. Verkaart, Eenige berekeningen over de bissectrices en de stralen der in- en aangeschreven cirkels van een driehoek.
C. A. Cikot, Het meetkundig bepalen van sommige maxima en minima.

## INHOUD VAN DEEL II.

Prof. Dr. W. A. Vrrsluys, Constructie van een parabool, waarvan de top, de as en een punt gegeven zijn.

Prof. Dr. J. G. Rutgers, Over een eigenschap en daaruit voortvloeiende constructies eener parabool.

Prof. Dr. J. Cardinaal, Beginselen der centrale projectie.

P. Wijdenes, Opgeloste vraagstukken bij art. XIIIa.

Prof. Dr. J. Cardinaal, Perspectief.

P. Wijdenes, Opgeloste vraagstukken bij art. XIIIb.

Prof. Dr. J. Cardinaal, De scheeve parallelprojectie.

P. Wijdenes, Eenige figuren bij art. XIIIc.

Prof. Dr. J. Cardinaal, Over de axonometrie.

P. Wijdenes, Oplossingen van een drietal vraagstukken uit art. XIIId.

P. Wijdenes, De verhouding 9 : 5 : 10 bij de axonometrie.

Prof. Dr. Jan de Vries, Rotatieinvarianten.

Prof. Dr. Fred. Schuh, Formule van Euler voor veelvlakken.

*Vraagstukken.*

Hoogere Algebra (1—125). — Analytische Meetkunde (1—125). — Rekenkunde (1—56). — Boldriehoeksmeting (1—76).

---

*Ter perse thans*

## Prof. Dr. J. A. Barrau, Analytische Meetkunde I 2de druk

## P. Wijdenes, Lagere Algebra I 3de druk

*en spoedig ter perse*

## P. Wijdenes, Middel-Algebra 2de druk

welke ook tegen verminderde prijs aan inteekenaars zullen worden aangeboden

op Jaargang 20 van het NIEUW TIJDSCHRIFT VOOR WISKUNDE

„ „ 11 van CHR. HUYGENS

„ „ 9 van EUCLIDES.

# NIEUW TIJDSCHRIFT VOOR WISKUNDE

ONDER REDACTIE VAN H. G. A. VERKAART, ROERMOND, EN P. WIJDENES, AMSTERDAM

MET MEDEWERKING VAN DE PROFESSOREN: DR. F. SCHUH, DELFT; DR. HK. DE VRIES, AMSTERDAM EN DR. J. DE VRIES, UTRECHT, EN VAN DR. L. CRIJNS, P. JANSEN, DR. P. DE VAERE, J. N. VISSCHERS, DR. J. F. DE VRIES EN DR. U. H. VAN WIJK.

1e Jaargang 1913/14.
Prijs ingebonden *f* 3.60, gebonden in stempelband *f* 4.85

2e Jaargang 1914/15.
Prijs ingebonden *f* 4.80, gebonden in stempelband *f* 6.05

3e Jaargang 1915/16.
Prijs ingebonden *f* 4.80, gebonden in stempelband *f* 6.05

4e/8e Jaargang 1916/21. Uitverkocht.

9e tot laatste jaargang *f* 6.—, ingebonden . . - 7.25

De vijfde jaargang bevat **een klapper** met een volledige systematische inhoudsopgave van de Jg. I—V, de tiende over de Jg. VI—X, de vijftiende over de Jg. XI—XV.

Het NIEUW TIJDSCHRIFT VOOR WISKUNDE verschijnt in 6 tweemaandelijksche afleveringen van minstens 4 vel druks gr. oct.; de artikelen, waarbij figuren behooren, worden flink geïllustreerd.

Het verschijnt 1 Sept., 1 Nov., 1 Jan., 1 Maart, 1 Mei en 1 Juli. Prijs franco per post en bij den boekhandel *f* 6.—.

*Het NIEUW TIJDSCHRIFT VOOR WISKUNDE wordt gehouden voor de examens Wisk. L.O. en K[1] en door hen, die dagelijks les in wiskunde geven.*

# CHRISTIAAN HUYGENS

## INTERNATIONAAL MATHEMATISCH TIJDSCHRIFT

ONDER REDACTIE VAN DR. F. SCHUH,
HOOGLEERAAR AAN DE TECHN. HOOGESCHOOL TE DELFT,
'S GRAVENHAGE, VAN BOETZELAERLAAN 28.

ASSISTENT-REDACTEUR:
K. HARLAAR - p/a P. WIJDENES,
JAC. OBRECHTSTR. 88, AMSTERDAM - Z.

Het tijdschrift „Christiaan Huygens" verschijnt om de 2 maanden, te beginnen 1 October; aldus 1 Oct., 1 Dec., 1 Febr., 1 April, 1 Juni, 1 Aug.

Elke aflevering is 3 à 4 vel, groot octavo, waar noodig goed geïllustreerd.

De prijs is slechts *f* 10.— **per jaar;** voor hen, die tevens op het N. T. v. W. (*f* 6.— per jaar) geabonneerd zijn, is de prijs voor beide **samen** *f* 14.—, in plaats van *f* 16.—

Premies, (men zie de lijst verder op), zijn ook verkrijgbaar voor de inteekenaars op „Christiaan Huygens".

Artikelen, nieuwe vraagstukken en oplossingen te zenden aan den assistent-redacteur K. Harlaar p/a P.Wijdenes, Jac. Obrechtstraat 88 Amsterdam-Zuid, alsmede boeken ter aankondiging en beoordeeling (gewone schoolboeken komen voor geen van beide in aanmerking).

*Het is bestemd voor leeraren en studenten en voor hen, die zich bekwamen voor de acte K V.*

# EUCLIDES

## TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER REDACTIE VAN J. H. SCHOGT, AMSTERDAM, EN P. WIJDENES, AMSTERDAM

MET MEDEWERKING VAN DR. H. J. E. BETH, DEVENTER; DR. E. J. DIJKSTERHUIS, OISTERWIJK; DR. G. C. GERRITS, AMSTERDAM; DR. W. P. THYSEN, BANDOENG; DR. P. DE VAERE, BRUSSEL EN DR. D. P. A. VERRIJP, ARNHEM.

9e Jaargang 1932/33. Ingenaaid . . . . . *f* 6.—

„EUCLIDES” verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs *f* 6.— per jaargang. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift of op Christiaan Huygens zijn ingeteekend, betalen *f* 5.—. Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam, Frans v. Mierisstraat 112; Tel. 28341. Aangeteekende zendingen met bijvoeging: „Amsterdam Zuid”. Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

*EUCLIDES is voor leeraren en die het hopen te worden; voor docenten aan Gymnasia, H.B.S., Kweekscholen, bij het Mulo enz. Men volgt daarin de evolutie van het wis- en natuurkundig onderwijs en hoort wat de besten onder de leeraren te zeggen hebben.*

DE INTEEKENING op deze drie uitstekend uitgevoerde Tijdschriften

## IS SLECHTS *f* 19 PER JAAR

Men blijft dan op de hoogte en maakt het wiskundig leven van zijn tijd geheel mede.—

*Voor doctorandi zijn ze een vindplaats voor stellingen voor hun proefschrift.*

LEERAREN, die de hoogste deelen van de Wiskunde wenschen bij te houden, geven zich op als

LID VAN HET

# WISKUNDIG GENOOTSCHAP

*E O A B*

EEN
ONVERMOEIDE
ARBEID KOMT ALLES TE
BOVEN

GEVESTIGD TE AMSTERDAM

en wel bij Dr. L. J. P. DE CHATELEUX, Amsterdam C - Heerengracht 475.

*f* 7.50 per jaar, waarvoor men alle uitgaven o.a. het *NIEUW ARCHIEF VOOR WISKUNDE* en de *WISKUNDIGE OPGAVEN* ontvangt.

**PREMIES, welke aan de inteekenaars op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, op „Christiaan Huygens" en „Euclides" tegen verminderde prijzen werden aangeboden.**

| | Prijs | Verminderde prijs |
|---|---|---|
| **1914/15.** | | |
| DE VRIES, Prof. Dr. Hk., De vierde dimensie (2e druk 1924/25) . . | *f* 3.90 | *f* 3.— |
| **1915/16.** | | |
| CIKOT, C. A., Complement der stereometrie (2e druk versch.) . . | - 2.25 | - 1.80 |
| SCHUH, Prof. Dr. F., Grepen uit de moderne meetkunde . . . . | - 11.40 | - 8.— |
| **1916/17.** | | |
| SCHOUTEN, Prof. Dr. G., Grondslagen der rekenkunde (2e druk 1926/27) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | - 3.— | - 2.40 |
| GONGGRIJP, Dr. B., Nieuwe methoden (uitverk.) . . . . . . | - 2.70 | - 2.30 |
| WOLLF, Prof. Dr. J., Complexe getallenstelsels . . . . . . . | - 0.60 | - 0.50 |
| DU SAAR, Dr. J., Wiskundig rapport . . . . . . . . . . . . | - 3.60 | - 3.— |
| **1917/18.** | | |
| SCHOUTEN, Prof. Dr. G., Beginselen van de leer der Congruentiën | - 1.50 | - 1.10 |
| WIJDENES, P., Uitgewerkte Mondelinge Examens (2e druk 1923/24) | - 6.— | - 3.— |
| BARRAU, Prof. Dr. J. A., Analytische Meetkunde I (2e druk 1932) | - 10.20 | - 7.10 |
| **1918/19.** | | |
| BARRAU, Prof. Dr. J. A., Analytische Meetkunde I . . . . . . | - 10.20 | - 7.10 |
| SCHUH, Prof. Dr. F., Leerboek der Theoretische Rekenkunde I . . | - 10.20 | - 7.10 |
| MANNOURY, Prof. G., Wiskunst Filosofie en Socialisme (2e druk versch.) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | - 0.75 | - 0.50 |
| RUTGERS, Prof. Dr. J. G. en Prof. Dr. F. SCHUH, Compendium der Hoogere Wiskunde III . . . . . . . . . . . . . . . . | - 9.— | - 6.60 |
| DE VRIES, Prof. Dr. Hk., Leerboek der Diff. en Integraal Rek. I (2e druk versch.) . . . . . . . . . . . . . . . . | - 19.20 | - 16.20 |
| SCHUH, Prof. Dr. F., Leerboek der Elementaire Theor. Rekenkunde. Deel I . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | - 10.80 | - 8.— |
| CORPUT, J. G. van der, Over roosterpunten in het platte vlak . . | - 3.60 | - 2.— |
| BAUDET, Dr. P. J. H., Het Limietbegrip . . . . . . . . . . . | - 0.75 | - 0.50 |
| BREMEKAMP, Dr. H., De Practische en Critische richting in de Wiskunde . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | - 0.75 | - 0.50 |
| **1919/20.** | | |
| WIJDENES, P., Lagere Algebra I (2de druk 1925/26) . . . . . | - 5.50 | - 4.40 |
| SCHUH, Prof. Dr. F., Oneindige producten . . . . . . . . . | - 4.75 | - 3.25 |
| VERKAART, H. G. A., P. WIJDENES en Dr. F. SCHUH, Mondelinge Examens Wiskunde L. O., K I en KV . . . . . . . . . | - 8.50 | - 5.— |
| DE VRIES, Prof. Dr. Hk., Leerboek der Diff. en Integraalrekening II | - 16.50 | - 13.50 |
| WIJDENES, P., Lagere Algebra II (Vergelijkingen, functies, grafieken) (2e druk 1926/27) . . . . . . . . . . . . . | - 7.50 | - 5.50 |

**PREMIES, welke aan de inteekenaars op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, op „Christiaan Huygens" en „Euclides" tegen verminderde prijzen werden aangeboden.**

| | Prijs | Verminderde prijs |
|---|---|---|
| **1920/21.** | | |
| VERSLUYS, J.—P. WIJDENES, Beknopt Leerboek der Analytische Meetkunde . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | - 3.— | - 2.50 |
| VERSLUYS, J.—P. WIJDENES, Over methoden bij het oplossen van Meetkundige Vraagstukken . . . . . . . . . . . . | - 3.— | - 2.40 |
| VERKAART, H. G. A., Gids Wiskunde L.O. 2e druk. (3e druk 1928/29) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | - 4.50 | - 4.— |
| SCHUH, Prof. Dr. F., Leerboek der El. Theor. Rekenkunde II . . . | - 10.80 | - 8.50 |
| SCHUH, Prof. Dr. F., Lessen over de Hoogere Algebra I, 9e druk van Lobatto (2e druk 1929/30). . . . . . . . . . . . | - 13.75 | - 11.50 |
| **1921/22.** | | |
| WIJDENES en SCHUH, Middel-Algebra . . . . . . . . . . . | - 10.50 | - 8.50 |
| SCHUH, Prof. Dr. F., Kansrekening . . . . . . . . . . . | - 4.25 | - 3.75 |
| DE VRIES, Prof. Dr. Hk., Differentiaalrekening III . . . . . . . | - 19.20 | - 16.20 |
| BREEN, A. J. v.,—WIJDENES, Vraagstukken van het examen K. I, 4e druk . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | - 2.60 | - 1.90 |
| **1922/23.** | | |
| WIJDENES, P., Rentetafels D . . . . . . . . . . . . . . | - 0.75 | gratis |
| LOBATTO—WIJDENES, Lessen over de Hoogere Algebra 2e stuk | - 4.75 | - 3.75 |
| WOLLF, Prof. Dr. J., Inleiding tot de Analytische Meetkunde . . | - 5.25 | - 4.25 |
| RUTGERS, Prof. Dr. J. G., Inleiding tot de Analytische Meetkunde, Deel I (2e druk 1928/29) . . . . . . . . . . . . | - 6.50 | - 5.50 |
| DE VRIES, Prof. Dr. Hk., Beknopt leerboek der Projectieve Meetkunde . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | - 7.50 | - 5.50 |
| WEITZENBÖCK, Prof. Dr. R., Invariantentheorie . . . . . . | - 6.— | - 5.50 |
| **1923/24.** | | |
| SCHUH, Prof. Dr. F., Vraagstukken over Differentiaal- en Integraalrekening en over Analytische en Beschrijvende Meetkunde, in het bijzonder met het oog op het Examen Wiskunde K. V. Deel II. Schriftelijke Vraagstukken van het Examen Wiskunde K V (1900—1922) met volledige Aanwijzingen ter Oplossing, en 31 figuren, Beschrijvende Meetkunde, gecart. . . | - 7.50 | - 5.— |
| RUTGERS, Prof. Dr. J. G., Inleiding tot de Analytische Meetkunde, Deel II . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | - 6.50 | - 5.50 |
| WIJDENES, P., Mondelinge examens Hoogere Algebra, 2e druk . . | - 6.— | - 3.50 |
| MOLENBROEK, Dr. P., Leerboek der Stereometrie, 6e druk (7e druk 1927/28) . . . . . . . . . . . . . . . . . | - 4.25 | - 3.50 |
| WIJDENES, P., Tien Jaargangen van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, Deel II . . . . . . . . . . . . . . . . | - 7.50 | - 4.50 |
| SCHUH, Prof. Dr. F., Lessen over de Hoogere Algebra, Deel II . . | - 11.50 | - 9.50 |

**PREMIES, welke aan de inteekenaars op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, op „Christiaan Huygens" en „Euclides" tegen verminderde prijzen werden aangeboden.**

| | Prijs | Verminderde prijs |
|---|---|---|
| **1924/25.** | | |
| SCHUH, Prof. Dr. F., Vraagstukken over Differentiaal en Integraalrekening, Deel III . . . . . . . . . . . . . . . . | *f* 14.50 | *f* 9.50 |
| MOLENBROEK, Dr. P., Leerboek der Vlakke Meetkunde, 6e druk (7e druk versch.) . . . . . . . . . . . . . . . . . . | - 6.50 | - 5.50 |
| DIJKSTERHUIS, Dr. E. J., Val en Worp, ing. *f* 7.50 voor *f* 6.— geb. | - 8.25 | - 6.75 |
| RUTGERS, Prof. Dr. J. G., Meetkunde der Kegelsneden . . . . | - 5.— | - 4.— |
| VERKAART, H. G. A., Tien Jaargangen van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, Deel I . . . . . . . . . . . . . . . | - 7.50 | - 4.50 |
| DE VRIES, Prof. Dr. Hk., en P. WIJDENES, Leerboek der Beschrijvende Meetkunde, Deel II . . . . . . . . . . . . . | - 5.90 | - 4.90 |
| DE VRIES, Prof. Dr. Hk., De Vierde Dimensie, 2e druk . . . . | - 3.90 | - 3.— |
| OS, Prof. Dr. Chs. van, Moderne Integraalrekening . . . . . . . | - 5.50 | - 4.50 |
| **1925/26.** | | |
| WIJDENES, P., Lagere Algebra, Deel I, 2e druk . . . . . . . | - 5.50 | - 4.50 |
| RUTGERS, Prof. Dr. J. G., Beknopte Analytische Meetkunde . . . | - 9.— | - 8.— |
| SCHUH, Prof. Dr. F., Vraagstukken over Diff.- en Int. rek. Deel I A . . . . . . . . . . . . . . . . . . . gec. | - 8.— | - 5.50 |
| SCHUH, Prof. Dr. F., en Ir. J. C. N. GRAAFLAND, E. I., Vraagstukken over Theoretische Mechanica, Deel I . . . . . | - 9.50 | - 8.— |
| DE VRIES, Prof. Dr. Hk., Historische Studiën I . . . . . . . . | - 3.25 | - 2.65 |
| **1926/27.** | | |
| SCHUH, Prof. Dr. F., Lessen over de Hoogere Algebra, Deel III . . | - 19.— | - 17.— |
| SCHUH, Prof. Dr. F., Bekn. Hoogere Algebra . . . . . . . . | - 15.— | - 14.— |
| SCHUH, Prof. Dr. F., Het Onmeetbare getal . . . . . . . . . | - 7.50 | - 6.— |
| WIJDENES, P., Lagere Algebra, Deel II, 2e dr. . . . . . . . . | - 8.50 | - 7.— |
| SCHOUTEN, Prof. Dr. G., Grondslagen der Rekenkunde, 2de druk | - 3.90 | - 3.25 |
| WIJDENES, P., Leerboek der Gonio- en Trigonometrie, 3e druk . | - 4.75 | - 3.90 |
| HAALMEIJER, Dr. B. P. en SCHOGT, J. H., Inleiding tot de leer verzamelingen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | - 3.25 | - 2.75 |
| **1927/28.** | | |
| BARRAU, Prof. J. A., Anal. Meetk., Deel II, De Ruimte . . . . | - 14.50 | - 12.— |
| SCHUH, Prof. Dr. F., Het natuurlijke Getal . . . . . . . . . | - 5.90 | - 4.50 |
| MOLENBROEK, Dr. P., Leerboek der Stereometrie, 7e druk . . . | - 5.— | - 4.25 |
| **1928/29.** | | |
| RUTGERS, Prof. Dr. J. G., Inleiding tot de Anal. Meetkunde. Deel I, Het platte Vlak, 2e druk . . . . . . . . . . . . . | - 6.50 | - 5.50 |
| SCHUH, Prof. Dr. F. en RUTGERS, Prof. Dr. J. G., Compendium der Hoogere Wiskunde, Deel IV . . . . . . . . . . . | - 15.50 | - 13.— |
| DIJKSTERHUIS, Dr. E. J., De elementen van Euclides, I . . . . | - 4.50 | - 3.90 |

**PREMIES, welke aan de inteekenaars op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, op „Christiaan Huygens" en „Euclides" tegen verminderde prijzen werden aangeboden.**

| | Prijs | Verminderde prijs |
|---|---|---|
| BETH, Dr. H. J. E., Inleiding in de Niet-Euclidische Meetkunde op historischen grondslag . . . . . . . . . . . . . . | *f* 4.50 | *f* 3.90 |
| VERKAART, H. G. A., Gids voor het examen L. O., 3e druk . . . | - 5.25 | - 4.50 |
| **1929/30.** | | |
| SCHUH, Prof. Dr. F., Lessen over hoogere Algebra I, 2de druk . . | - 13.75 | - 11.50 |
| DE VRIES, Prof. Dr. Hk., Beknopte Differentiaal en Integraalrekening | - 15.— | - 12.50 |
| SCHUH, Prof. Dr. F., Axiomatische behandeling der meetbare en onmeetbare verhoudingen van grootheden . . . . . . . | - 3.25 | - 2.50 |
| DIJKSTERHUIS, Dr. E. J., De Elementen van Euclides II . . . . . | - 5.75 | - 5.— |
| **1930/31.** | | |
| **10 % korting op alle wiskundige werken, vermeld in Catalogus „C".** | | |
| WIJDENES, P., Oplossingen en uitwerkingen van de Vraagstukken uit Dr. Molenbroeks Vlakke Meetkunde . . . . . . . . | - 2.50 | - 2.— |
| **1931/32.** | | |
| BETH, Dr. H. J. E., Newtons Principia, 2 deelen . . . . . geb. | - 8.50 | - 6.25 |

N.B. Wie na 1 Jan. 1933 (resp. 1 Mrt. '33) direct van den uitgever een vroegeren jaargang ontbiedt, heeft nog recht op de premies bij dien jaargang (tenzij inmiddels herdrukt).

**Doorloopend verkrijgbaar tegen verlaagde prijzen, uitsluitend voor abonné's N. T. v. W. Chr. Huygens, en Euclides:**

| | | |
|---|---|---|
| VERKAART, H. G. A., Gids voor het examen L. O., 3e druk . . . | - 5.25 | - 4.50 |
| VERKAART, H. G. A., Tien Jaarg. N. T. v. W. Deel I . . . . . . | - 7.50 | - 4.50 |
| WIJDENES, P., Tien Jaarg. N. T. v. W. Deel II . . . . . . . . | - 7.50 | - 4.50 |
| VERKAART, WIJDENES en SCHUH, Mondelinge Examens Wisk. L.O., K I en K V . . . . . . . . . . . . . . . . | - 8.50 | - 5.— |
| WIJDENES P., Uitgewerkte Mondelinge Examens Hoogere Algebra, 2e druk . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | - 6.— | - 3.50 |
| WIJDENES, P., Celluloïd kegelsneden . . . . . . . . . . . | - 3.50 | - 3.— |
| Inteekening op N. T. v. Wisk. en Euclides . . . . . . . . . | - 12.— | - 11.— |
| „ „ N. T. v. Wiskunde en Chr. Huygens . . . . . . | - 16.— | - 14.— |
| „ „ Chr. Huygens en Euclides . . . . . . . . . | - 16.— | - 15.— |
| „ „ alle drie Tijdschriften . . . . . . . . . . | - 22.— | - 19.— |
| SCHUH, Prof. Dr. F., Vraagst. diff. en integr. rekening en over anal. en beschr. meetk. . . . . . . . . . . . . . . . . . | | |
| Deel I A. Vraagstukken over differentiaalrekening met volledige aanwijzingen ter oplossing met 4 figuren . . . . . | - 8.— | - 5.50 |
| Deel II. Schriftelijke vraagstukken Examen Wiskunde K V (1900—1922) met volle aanwijzigingen ter oplossing . . | - 7.50 | - 5.— |
| Deel III. Vraagstukken over differentiaal- en integraalrekening met volledige aanwijzingen ter oplossing . . . . . | - 14.50 | - 9.50 |
| Reductie vacantiecursus Prof. Rutgers en Schuh 10 % van . . KI | - 50.— | |
| KV | - 70.— | |

de aan het eind van het verslag der vorige commissie uitgesproken meening, richt de commissie het verzoek tot Uwe Excellentie de vrijstelling voor het afleggen van dit onderdeel van het examen, verleend op grond van het bezit van de akte voor gewoon lager onderwijs, in te trekken, aangezien het bezit van deze akte geen waarborg biedt voor kennis van de methodiek van het onderwijs in een vreemde taal. De commissie acht deze kennis zoo onontbeerlijk voor den aanstaanden docent ,dat zij haar opvolgster in overweging zou willen geven meer tijd voor dit onderdeel beschikbaar te stellen.

**Verslag van de Commissie 1929 voor het Staatsexamen.**

(Vervolg).

Ook dit jaar liet het wiskunde-examen zoowel van de A- als van de B-candidaten weer zeer veel te wenschen over.

Niet alleen het inzicht in de meest voorkomende wiskundige begrippen, maar ook de geoefendheid in het oplossen van eenvoudige, direct bij de theorie aansluitende vraagstukken bleek bij het mondeling examen zeer gering te zijn.

Zelfs waren er A-candidaten, die de stereometrie niet hadden bestudeerd, hoewel toch het Koninklijk besluit, inhoudende het programma van het eindexamen der gymnasia en het daarmee gelijkgestelde Staatsexamen, dit vak afzonderlijk vermeldt.

Met den grootsten nadruk wil de commissie er nog eens op wijzen, dat niet alleen de B-candidaten, maar ook zij, die het A-diploma wenschen te verwerven, zich ernstig voor de wiskunde hebben voor te bereiden.

Allereerst eenige bijzonderheden over het wiskunde-examen der A-candidaten.

Bij het examen in de algebra bleek vrij algemeen, dat men van het onderzoek van eenvoudige functies met behulp van de grafische voorstelling zoogoed als geen begrip had. Op een enkele uitzondering na wist geen der candidaten de functie $y=x^2(1-x^2)$ grafisch voor te stellen. Had men met veel moeite de drie nulwaarden gevonden, dan was meer dan eens de conclusie, dat de grafiek samenviel met de x-as. Sommige candidaten trokken een parabool door de twee uiterste nulwaarden, in de meening, dat een grafiek steeds òf een rechte lijn, òf een parabool moest zijn. Het onderzoek van eenvoudige functies als $y = x^2 - x$, $y = x^2 - 4$, $y = x^2 + 2$, $y = x^2 - x - 6$ etc. werd meestal gedaan met behulp van zeer zwaarwichtige, maar vrij overbodige formules, betreffende den drieterm in zijn algemeene gedaante. Bij nader onderzoek bleken die formules vaak machinaal geleerd te zijn.

Aan de begrippen identieke en valsche vergelijking, zoowel als aan die van afhankelijke en strijdige vergelijkingen bleek men wel aandacht besteed te hebben. Aan het juiste inzicht ontbrak echter vaak nogal het een en ander. Zoo was voor menigen candidaat de vergelijking $2x = 3x$ valsch en waren de vergelijkingen $2x + y = 3$ en $4x + 3y = 6$ strijdig.

Twee vergelijkingen met twee onbekenden van het volgende type

$$(2x + y - 3)\ (x - y)\ (x + y + 1) = 0$$
$$(x + y)\ (2x + y - 4)\ (x + 2y - 2) = 0.$$

gaven in het algemeen heel veel moeilijkheden. Vele candidaten stelden voor, de vermenigvuldigingen uit te voeren.

In de planimetrie bleek bij weinig candidaten eenige vaardigheid in het werken met meetkundige plaatsen. Een vraagstuk als het volgende: Met een gegeven straal een cirkel te construeeren, die van een gegeven lijn een koorde van gegeven lengte afsnijdt en den omtrek van een eveneens gegeven cirkel middendoordeelt, kon men zonder hulp niet oplossen.

In de stereometrie kwam van vraagstukken over kruisende lijnen maar weinig terecht. Zonder eenig overleg en inzicht ging men hierbij te werk; het aanbrengen van vlakken door twee elkaar kruisende lijnen of van een vlak door een van twee willekeurige kruisende lijnen loodrecht op de andere ,alsmede het aanbrengen van een vlak door een willekeurige lijn evenwijdig aan een gegeven vlak, was dan ook schering en inslag.

Van de lichamen met gebogen oppervlak kende men veelal niet meer dan eenige uit het hoofd geleerde inhoudsformules van den bol en zijn deelen.

Een vraagstuk echter als het volgende: Hoe ver moet het oog van het middelpunt van een gegeven bol verwijderd zijn opdat men een derde deel van de oppervlakte er van ziet, leverde groote moeilijkheden op; slechts een enkele candidaat sloeg er zich zonder hulp doorheen.

Wat de B-candidaten betreft, is het de subcommissie ook dit jaar weer opgevallen, dat het schriftelijk werk zeer slordig en onmethodisch werd gemaakt. Vooral bij het reken- en cijferwerk en het transformeeren van formules ging men met weinig overleg te werk, met het gevolg, dat de bewerkingen vaak zeer omslachtig en ingewikkeld werden. Dat hierdoor de kans om cijfer- en schrijffouten te maken in sterke mate vergroot wordt, bleek duidelijk uit de vele doorhalingen in het schriftelijk werk.

Deze onsystematische, vaak verwarde wijze waarop het werk in het algemeen gemaakt wordt, is in hoofdzaak toe te schrijven aan onvoldoende geoefendheid in het maken van vraagstukken.

Uit de examenresultaten van de goniometrie en trigonometrie bleek weer duidelijk, dat de candidaten dit onderdeel der wiskunde veel te machinaal bestudeeren. Het feit, dat een driehoek door een zijde en twee hoeken volkomen is bepaald en dat men dus R, r, r a, h a etc. in die zijde en de goniometrische verhoudingen der hoeken moet kunnen uitdrukken, was echter tot weinige candidaten doorgedrongen. Bij het ondrezoek naar de kennis van de grafische voorstellingen der goniometrische functies werden vele leemten geconstateerd. Geen der candidaten wist de grafische voorstelling van de functie $y = \sin x + \cos x$ zonder hulp van den examinator in verband te brengen met de sinuslijn.

Ook in de analytische meetkunde gaven weinig candidaten blijk van goed begrip. Te veel bedient men zich in eenvoudige gevallen van ingewikkelde formules.

Zoo gebruiken de candidaten vaak de richtingsvergelijkingen van de raaklijn aan een kegelsnede en kiezen dan juist de verkeerde formule. Aan dit euvel kan men ontkomen wanneer men niet de formules leert, maar zich wel den gedachtengang eigen maakt, die tot de formules leidt en dezen in het betrokken vraagstuk aanwendt.

Heeft men, om nog eens een voorbeeld te noemen, den aard eener kegelsnede te onderzoeken, wanneer die in haar algemeene gedaante gegeven is, dan bepale men de snijpunten met een rechte door den oorsprong of men losse de vergelijking naar y op. De candidaten werkten in het algemeen met den discriminant, doch wisten hiervan geen verklaring te geven.

De commissie wil besluiten met de opmerking, dat de candidaten zich bij hun studie van de wiskunde meer moeten instellen op inzicht en methode dan op het kennen van veel formules.

De resultaten van het examen in de natuurkunde zijn al evenmin schitterend te noemen, zooals een blik op tabel II doet zien. De klachten, door de vorige commissie geuit, kunnen in vele opzichten herhaald worden. Het oplossen van eenvoudige vraagstukjes (alleen hiertoe moest men zich beperken, om eenigszins bevredigende antwoorden te verwachten) ging velen candidaten weinig vlot van de hand. Dit bleek niet het minst bij de mechanica, bijv. als gevraagd werd naar de spanning, optredend in den ophangdraad van een slingerend lichaam op het moment, dat het den evenwichtsstand passeert, of als gevraagd werd naar de constante kracht, die een wagen van 20,000 K.G. in 100 seconden een snelheid van 10 m/sec. zou moeten geven, enz. Groote leemten in kennis en inzicht werden voorts geconstateerd, wanneer gevraagd werd isothermen af adiabaten te schetsen, de beteekenis van cp en cr toe te lichten, een beschouwing te houden over de grootte van de verdampingswarmte van water van 100°, enz., allemaal quaesties dus, waarop men redelijkerwijs een behoorlijk antwoord mag verwachten. Nog waren er enkele candidaten, die de lenzenformule met de spiegelformule verwarden en de noodzakelijkheid van het optreden van een brekingsindex in de formule niet voldoende aanvoelden; verscheidenen konden de formule niet goed toepassen, als hun eenvoudige vraagstukjes bijv., „licht de werking van een loupe toe door een constructie en bepaal de vergrooting" werden voorgelegd. Dat de brekingsindex van glas ongeveer 1½ is, wisten weinig candidaten; ook met de beteekenis, die de brekingsindices toekomt volgens de theorie van Huygens, bleek men niet algemeen vertrouwd te zijn. De kennis van de nicol was veelal zeer oppervlakkig; het inzicht in de interferentieverschijnselen gebrekkig. Hoewel enkele candidaten polarisatieverschijnselen in de geluidsleer niet onmogelijk achtten, moet toch gezegd worden, dat dit onderdeel over het algemeen vrij behoorlijk werd gekend; enkelen konden zelfs verklaren, waarom in de vergelijking van La Place de verhouding $\frac{cp}{cv}$ optreedt.

Wat de electriciteitsleer betreft, verbaasde het de commissie in hooge mate, dat zoo iets eenvoudigs als het schakelen van elementen nog moeilijkheden op kon leveren; dat men niet algemeen bekend was met het begrip electromotorische kracht, dat vele candidaten niet wisten, dat electromotorische krachten van inductie ook optreden bij draaiende motoren.

Met een kilowattuur was men over het algemeen slecht op de hoogte. Niet beter was het gesteld met gloeidraadelectroden, afwijking van kathode stralen in een magnetisch veld, etc. De begrippen veldsterkte en potentiaal stonden niet alle candidaten helder voor den geest, terwijl ook de kennis van het verband tusschen de eenheden, welke men in de electriciteitsleer pleegt te gebruiken, wel eens te wenschen overliet.

(Slot volgt).

**Toelating tot de Rijkskweekscholen voor vroedvrouwen.**

De Min. van Arbeid, Handel en Nijverheid, brengt ter kennis van haar, die met den cursus, welke aanvangt in het begin van September van dit jaar, als in- of niet dan bij hooge uitzondering als uitwonend leerling op eene der Rijkskweekscholen voor vroedvrouwen wenschen te worden toegelaten, dat ter voldoening aan art. 5 van het bij Kon. Besl. van 21 Juli 1902 (St.bl. no. 157) vastgestelde en bij Kon. Besl. van 22 Maart 1924 (Stbl. no. 156) laatstelijk gewijzigde reglement voor die scholen eerlang gelegenheid zal worden gegeven tot het afleggen van het toelatingsexamen.

Het schriftelijk gedeelte van het toelatingsexamen zal worden afgenomen in de Ridderzaal te 's-Gravenhage op Woensdag 7 Mei a.s., terwijl de candidaten, wier schriftelijk werk niet geheel en al onvoldoende moet worden geacht, zoodat ze het onderwijs aan eene der Rijkskweekscholen onmogelijk zouden kunnen volgen, daarna nader zullen worden opgeroepen tot het mondeling onderzoek, dat in Amsterdam en Rotterdam zal worden ingesteld.

Zij, die tot het examen wenschen te worden toegelaten, onverschillig waar zij metterwoon gevestigd zijn, gelieven daarvan te doen blijken aan den voorzitter der examencommissie dr. J. Th. Terburgh, hoofdinspecteur van de Volksgezondheid, Dr. Kuyperstraat 8, te 's-Gravenhage, **vóór 19 April a.s., met opgaaf**

van de school, waarop zij bij voorkeur wenschen te worden geplaatst.

Het schoolgeld bedraagt ƒ 200 's jaars voor de inwonende leerlingen, ƒ 100 's jaars voor de uitwonende leerlingen. Van de verplichting tot betaling van schoolgeld kan in bijzondere gevallen gedeeltelijke of geheele ontheffing worden verleend. Bij de aangifte moet worden medegedeeld, of bij eventueele plaatsing op eene der scholen het schoolgeld zal worden betaald, dan wel gedeeltelijke of geheele ontheffing zal worden gevraagd.

Voor het verkrijgen van de meer uitvoerig gestelde voorwaarden kan men zich wenden tot de directie der scholen te Amsterdam en Rotterdam.

### Aanvullend onderwijs.

Na op 14 Juli 1928 haar voorloopig verslag over het aanvullend onderwijs te hebben aangeboden, hetwelk heeft geleid tot de indiening van het ontwerp-Cursus-wet van minister Waszink in Februari 1929, welk ontwerp niet meer in dat zittingsjaar is behandeld, heeft de staatscommissie-Van Wijnbergen op verzoek van minister Terpstra haar arbeid hervat en thans haar definitieve verslag aan de Koningin aangeboden.

Daar de minister een afzonderlijke invoeringswet niet gewenscht achtte, stond de commissie voor de vraag op welke wijze en op welk tijdstip het reeds bestaand aanvullend onderwijs zich aan den nieuwen, door de Cursuswet geschapen toestand zou hebben aan te passen. Dit is geregeld in de overgangsbepalingen. Als datum van in werking treding der wet is daarin genoemd 1 Januari 1931.

Voort regelen zij de rechtspositie van het onderwijzend personeel, dat werkzaam is aan avondscholen en cursussen, die eigener beweging zullen worden omgezet in cursussen volgens de Cursuswet, door hen, die binnen een jaar na de opheffing der bestaande inrichtingen benoemd worden aan een nieuwen cursus, de bevoegdheid te verleenen den wensch te kennen te geven, dat voor hen de regeling zal blijven gelden volgens welke zij laatstelijk werden bezoldigd.

Verder wordt in de overgangsbepalingen vastgesteld, dat het bestaand aanvullend onderwijs voorloopig in stand kan worden gehouden volgens de thans geldende voorschriften en dat de gegevens zullen worden verzameld, welke zullen moeten dienen om alle thans bestaande soorten van aanvullend onderwijs in de toekomst aan gelijkluidende wettelijke voorschriften, ook ten aanzien van het Rijkssubsidie te onderwerpen. Ten slotte wordt de termijn, binnen welken uiterlijk bij de Staten-Generaal een ontwerp van wet zal moeten worden ingediend dat alle thans bestaande soorten van aauvullend onderwijs aan gelijkluidende wettelijke voorschriften onderwerpt, bepaald op 5 jaar na het in werking treden der wet.

De commissie schat de kosten voor het Rijk bij een subsidie van 10 cent per leerlinguur op ten hoogste ƒ 1,600,000.

Zij stelt twee wijzigingen voor op het aanhangige ontwerp. In de eerste plaats stelt zij voor ook het land- en tuinbouwonderwijs onder de nieuwee regeling te begrijpen, die in het ontwerp daarvan zijn uitgezonderd, omdat de land- en tuinbouwcursussen ressorteeren onder een ander departement. In de tweede plaats stelt zij thans, in afwijking van haar standpunt in haar voorloopig rapport ingewonnen, voor aan de gemeentebesturen de verplichting op te leggen voldoende gelegenheid te bieden tot het ontvangen van cursusonderwijs.

Het gevaar, dat de commissie aanvankelijk duchtte, om de gemeenten nieuwe lasten op te leggen, heeft volgens het rapport veel van zijn kracht ingeboet, nu de wettelijke regeling betreffende de financieele verhouding tusschen Rijk en gemeenten tot stand is gekomen.

### Examens wis- en natuurkunde m.o. en wiskunde l. o.

De Min. van O,. K. en W., gelet op art. 69 der Wet tot regeling van het M.O., heeft goedgevonden:

1e. te bepalen, dat de commissie, aan welke wordt opgedragen het examineeren van hen, die eene akte van bekwaamheid verlangen tot het geven van **middelbaar onderwijs in de wis- en natuurkundige wetenschappen**, voor het jaar 1930 zitting zal houden te 's-Gravenhage, met uitzondering van de examens voor de akte K IV, welke zullen worden afgenomen te Amsterdam, Utrecht, Groningen en Leiden;

2e. aan die commissie tevens op te dragen het examineerenu van hen, die in 1930 de akte van bekwaamheid wenschen te verkrijgen tot het geven van lager onderwijs in de wiskunde;

3e. te benoemen:

tot lid en voorzitter dier commissie: dr. G. H. Coops, inspecteur v. h. M.O. te 's-Gravenhage;

tot leden en ondervoorzitters: dr. J. de Vries, oud-hoogleeraar, Utrecht en ir. C. B. Biezeno, hoogleeraar Techn. Hoogeschool Delft;

tot leden: dr. J. C. Kluyver, dr. W. van der Woude, dr. F. A. H. Schreinemakers, dr. W. H. Keesom, hoogleeraren; dr. J. Droste, lector en dr. J. H. Oort, privaatdocent en conservator aan de Sterrenwacht te Leiden; dr. H. Bremekamp, H. J. van Veen en ir. P. Landberg, hoogleeraren Techn, Hoogeschool te Delft; dr. J. A. Barrau en dr. J. Wolff, hoogleeraren Rijksuniversiteit Utrecht; J. M. W. Spronk, leeraar 1ste Gem. H. B. S. 5-jar. 's-Gravenhage; ir. Ph. J. Stok en J. W. van Eek, leeraren 2de Gem. H.B.S. 5-jar. 's-Gravenhage; G. A. Jansen, leeraar Chr. H.B.S. Leiden en ir. W. Jonkergouw, leeraar R.-K. H.B.S. 's-Gravenhage;

tot plaatsvervangende leden: dr. G. Schaake, privaatdocent Gem. universiteit Amsterdam; dr. A. van Thijn, oud-leeraar M.O., 's-Gravenhage en dr. N. W. Doorn, assistent Teylers' Instituut Haarlem;

in de subcommissie K IV te Amsterdam:

tot lid en ondervoorzitter: dr. Th. Weevers, hoogleeraar Gem. universiteit te Amsterdam, wonende te Amersfoort, en

tot leden: dr. J. E. W. Ihle, hoogleeraar Gem. universiteit te Amsterdam, wonende te Utrecht, en dr. H. A. Brouwer, hoogleeraar Gem. universiteit te Amsterdam;

in de subcommissie K IV te Utrecht:

tot lid en ondervoorzitter: dr. F. A. F. C. Went, en tot leden: dr. H. F. Nierstrasz en dr. L. Rutten, allen hoogleeraar Rijksuniversit. Utrecht;

in de subcommissie K IV te Groningen:

tot lid en ondervoorzitter: dr. J. F. van Bemmelen, en tot leden: dr. J. C. Schoute en dr. J. H. Bonnema, allen hoogleeraar Rijksuniversiteit Groningen;

in de subcommissie K IV te Leiden:

tot lid en ondervoorzitter: dr. J. M. Janse, en tot leden: dr. P. N. van Kampen en dr. B. G. Escher, allen hoogleeraar Rijksuniversiteit Leiden;

tot plaatsvervangend lid: dr. J. C. van der Klaauw, ocnservator zoölogisch lobaratorium Rijksuniversiteit Leiden.

### Nijverheidsonderwijs.

De Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen, heeft bepaald, dat de commissie belast met het afnemen van de examens ter verkrijging van de akten van bekwaamheid tot het geven van nijverheidsonderwijs, gemerkt N I, N III (met aanteekening), N B (met aanteekening), N IXa, N IXb, N X, N XI, N XIII, Nb, Nc, Ne, Nf, Nh tot en met Np alsmede ter verkrijging van eene akte van bekwaamheid tot het geven van middelbaar onderwijs in hand- en rechtlijnig teekenen (Ma) voor het jaar 1930 zitting zal houden te 's-Gravenhage;

en benoemd tot lid en voorzitter dier commissie: H. J. de Groot, te 's-Gravenhage;

tot leden, om zoo noodig met het waarnemen van het voorzitterschap te worden belast: G. A. Groote Haar, te 's-Gravenhage en dr. A. Pit te Laren (N.-H.);

tot leden: J. G. Beernink, te 's-Gravenhage; H. C. Bonsel, te Tilburg; J. Broeren, te Amsterdam, J. Bubberman, te Breda, ir. H. van Couwelaar, Amsterdam; H. Diederiks, 's-Gravenhage; P. Doorn, wonende te Bilthoven; G. L. Domhoff, 's-Gravenhage; ir. H. M. H. Doppler 's-Gravenhage; N. D. van Dijk, Haarlem; M. Dijkerman, 's-Gravenhage; H. Ellens, Amsterdam; J. L. G. Faber, 's-Gravenhage; August Falise te 's-Hertogenbosch, Fr. Th. Grabijn, 's-Gravenhage; F. W. C. Grave, 's-Gravenhage; ir. H. F. C. Grevers, Delft; H. Ph. P. Grootendorst, 's-Gravenhage; B. Th. de Hey, 's-Gravenhage; A. Hoeflake, 's-Gravenhage; Hendrik Hoek, te 's-Gravenhage; J. P. Hutjens, te 's-Gravenhage; mej. J. de Jong, Amsterdam; prof. H. Kal Delft; G. H. Kleinhout, Baarn; ir. G. Knuttel, 's-Gravenhage; R. Kraakman, Haarlem; ir. P. J. Kramer, Amsterdam; D. van Loon, 's-Gravenhage; Huib Luns, Amsterdam; H. Mees, Rotterdam; Antoon H. J. Molkenboer, 's-Gravenhage; C. H. Monteban, 's-Gravenhage; E. J. F. Piquillot, 's-Gravenhage; P. H. Pomes, Schiedam; ir. D. Postma, Amsterdam; H. Reynders, 's-Gravenhage; A. Ritter, Delft; L. Ronner, Amsterdam; J. D. Ros, 's-Gravenhage; H. Rozenbeek, Heerenveen; prof. dr. J. G. Rutgers, 's-Gravenhage; ir. J. J. Schaly, 's-Gravenhage; G. J. Scheepers, 's-Gravenhage; B. Steggerda, Breda; J. A. Thomassen, 's-Gravenhage; ir. H. J. W. Thunnissen; K. Vegter, te 's-Gravenhage; A. F. W. Verdu, 's-Gravenhage; A. de Vos, 's-Gravenhage; ir. W. de Vrind, 's-Gravenhage; ir. J. J. H. Vrijdaghs, Groningen; A. G. Wamsteeker, 's-Gravenhage; A. H. Wirtz, Breda en ir. A. W. Zuidweg, 's-Gravenhage;

tot plaatsvervangende leden: C. Menke, Utrecht en J. C. Speelman, Delft.

---

### VRAGENBUS.

**Inzenders van vragen gelieven 6 cents postzegel voor antwoord in te sluiten.**

**Vraag 610.** Welke werken raadt U een hoofdakte-candidaat ter lezing aan naast zijn studieboek voor aardrijkskunde.

a. Als hij speciaal bestudeert De Vereenigde Staten van Amerika. b. Engeland en Canada. c. Frankrijk.

**Antw.** a. G. J. A. Mulder: De V.S. van Amerika met hulpboekje. b. R. Schuiling: Frankrijk. c. R. Schuiling: Engeland. (uitgaven van W. J. Thieme & Cie, Zutphen). Ieder van deze boekjes geeft nader te bestudeeren of te lezen werken aan.

**Vraag 611.** Wie kan ons zeggen, waar de volgende liedjes voorkomen:

a. M'n moeder bakt 'n pannekoek, van H. C. van Oort.

b. Kleppermarsch v. Annie Frank.

c. Ik moest eens met mijn kleine zus]
Al om een boodschap gaan.

d. het Indische liedje:
ajoon, ajoon, ajoon,
In dien hoogen klapperboom.

**Vraag 612** Wie kan ons mededeelen de titel en uitgever van het dicteeboekje, waarin o.a. voorkomt: In de laatste helft van de Meimaand maakte ik met mijn drie Zuid-Hollandsche kennissen, candidaat-notaris Van der Laan, de drogist Daalders en zijn broer een advocaat uit den Haag een reisje naar Godesberg en de heerlijke Rijn en het zoo vaak bezongen Zevengebergte enz.

**Vraag 613.** a. Door welke vereenigingen wordt examen gehouden voor Duitsche Handelscorrespondentie?

b. Wat zijn de eischen voor het Mercurius-diploma?

c. Welke boeken zijn geschikt voor deze examens?

**Antw.** a. Gewoonlijk 2 × per jaar, n.l. ± April en Nov. door de Federatie van Handels- en Kantoorbedienden-Vereenigingen in Nederland. Bij deze zijn de meeste vereenigingen aangesloten. Het adres voor alle examens en aanvragen is:

# Schriftelijk Examen Wiskunde L. O. 1930.

## Planimetrie 2.

Van het tweede planimetrische vraagstuk (zie no 7 van de Vac. van 10 Sept.) zendt de heer A. J. M. Brogtrop te Bergen op Zoom ons de volgende fraaie en eenvoudige oplossing. (De belangstellende lezer teekene een cirkel met middellijn AB, daarin $bg$ AC $= bg$ CD en noeme AC $= d_k$, BC $= d_{n-k}$ en trekke CF $\perp$ AB; DE $\perp$ AB, AD $= d_{2k}$, BD $= d_{n-2k}$ en DE $= \frac{1}{2} d_{4k}$, CF $\frac{1}{2} d_{2k}$.) Blijkbaar is $\triangle$ ABC $\sim$ $\triangle$ ACF en $\triangle$ ABD $\sim$ $\triangle$ ADE; dus:

$$\tfrac{1}{2}\, d_{2k} : d_k = d_{n-k} : 2\text{R}$$
$$d_{2k} : \tfrac{1}{2}\, d_{4k} := 2\,\text{R} : d_{n-2k},$$

waaruit door vermenigvuldiging verkregen wordt:

$$d^2_{2k} : d_k .\ d_{4k} = d_{n-k} : d_{n-2k}.$$

De heer B. voegt aan zijn schrijven toe: „Ik blijf het jammer vinden, dat in het algemeen de vraagst. van het akte-examen L.O. te moeilijk zijn en dat op het examen in het algemeen **bekwaamheid** wordt uitgescha

den
eer-
met
een
zen

m.i.
de
eld.
hoe
ode
inst
ruit

een

o'n
is;
aar
in
op
het
ar

op zeker gebied voorgelicht worden. En dan moet men zich tot de school kunnen wenden.

De boeren uit een buurtschap onzer gemeente hadden laatst het hoofd hunner school verzocht, met een fietstocht mee te gaan, [illegible]en einde bijzonderheden van de streek te vertellen.

Zoo werkt de school, niet alleen voor de kinderen, maar ook voor de grooteren. Dat is de weg, om de verloren liefde weer te herwinnen.

De inspecteur van het onderwijs in de gem. Lonneker,

J. A. SELLENRAAD.

**Het Montessori-lyceum te te Amsterdam.**

Onlangs is het eerste M[illegible] lyceum te Amsterda[illegible] Men schrijft naar [illegible] van aan de N.R[illegible]

G[illegible]enkboek en, als ik alleen de ar-ti[illegible]elen van Wagenvoort en Alma n[illegible]oem, dan is dit, omdat daarin — terloops — zoo juist gewaarschuwd wordt tegen valsch pathos, tegen toosten op het Latijn, tegen eenzijdigheid, die zooveel bederven. Men voelt in die artikelen de warme liefde voor de klassieken en mist met blijdschap het valsch pathos.

Dezer dagen trof mij een sterk voorbeeld van liefde voor de klassieken. Edouard Herriot, politicus en fijn letterkundige, die in 1922 in de Fransche Kamer met eenige andere afgevaardigden het klassieke onderricht bestreed en op zijn beurt bestreden werd door Bérard en Léon Daudet, heeft zoo pas uitgegeven een bekoorlijk boekje over [illegible] reis naar Griekenland. Het be-[illegible] "Ce promeneur, qui sur le tard [illegible]rs se rend en Grèce, il va [illegible] ce qui fut le culte [illegible] boekje

# Hoofdonderwijzers-Examen 1935.

**WISKUNDE (2 uur).**

1. Herleid:

$$\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt[4]{(28+16\sqrt{3})}}{\sqrt{(2+\sqrt{3})}-\sqrt{(2-\sqrt{3})}}=$$

Oplossing: We berekenen eerst $\sqrt{(2+\sqrt{3})}$.

Stel $\sqrt{(2+\sqrt{3})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

$2+\sqrt{3}=x+y+2\sqrt{xy}$

$x+y=2$ en $2\sqrt{xy}=\sqrt{3}$

$x^2+2xy+y=4 \qquad 4xy=3$

$4xy=3$

$x^2-2xy+y=1$

$x-y=1$

$x+y=2$

$2x=3$

$x=1^1/_2$

$y=2-1^1/_2={}^1/_2$

$\sqrt{(2+\sqrt{3})}$ is dus $=\sqrt{1\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{6}+\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Op dezelfde manier vinden we nu voor $\sqrt{(2-\sqrt{3})}=\frac{1}{2}\sqrt{6}-\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

We berekenen nu: $\sqrt[4]{(28+16\sqrt{3})}$

$\sqrt[4]{(28+16\sqrt{3})}=\sqrt{\sqrt{(28+16\sqrt{3})}}$

$=\sqrt{(4+2\sqrt{3})}$

$=1+\sqrt{3}$.

De gegeven vorm dus nu:

$$\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}-1-\sqrt{3}}{\frac{1}{2}\sqrt{6}+\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{6}+\frac{1}{2}\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1.$$

2. De wortels van de vierkantsvergelijking

$$x^2+(8a+6b)x+5a+10b=0$$

zijn het vijfvoud van de wortels van de tweedegraadsvergelijking

$$x^2+(3a+4b-7)x=a-b.$$

Bepaal a en b.

Oplossing:

De tweedegraadsvergelijking schrijven we in de gedaante:

$$x^2+(3a+4b-7)x-a+b=0.$$

Ook dit is nu en vierkantvergelijking.

Noem de wortels der eerste vergelijking $x_1$ en $x_2$.

Dan zijn de wortels de tweede vergelijking $1/5\ x_1$ en $1/5\ x_2$.

Dan is: $x_1+x_2=-8a+6b$ en $x_1\times x_2=5a+10b$ (1e vergel.)

Ook is ${}^1/_5x_1+{}^1/_5x_2=3a-4b+7$ en ${}^1/_{25}x_1x_2=-a+b$. (2e vergel.)

Dus is: $x_1+x_2=-15a-20b+35$ en $x_1x_2=-25a+25b$.

Dan is $-8a+6b=-15a-20b+35$ en:
$5a+10b=-25a+25b.$

Dus:

$$\left.\begin{array}{r}7a+14b=35\\30a-15b=0\end{array}\right\}\begin{array}{l}\times+4\frac{2}{7}\\\times+1\end{array}\left\{\begin{array}{r}30a+60b=150\\30a-15b=0\end{array}\right.$$

$75b=150$

$b=2.$

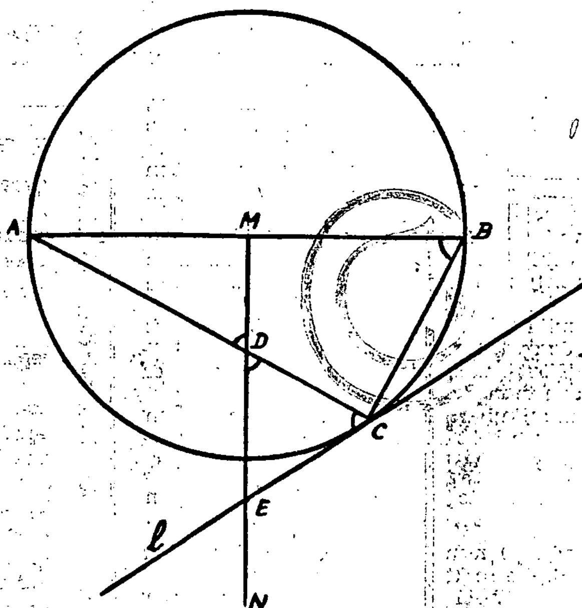
$30a+120=150$

$30a=30$

$a=1$

3. Om een rechthoekige driehoek ABC, rechthoekig in C, is een cirkel beschreven. De middelloodlijn van de schuine zijde snijdt de ene rechthoekszijde in D en de rechte, die de cirkel in C raakt, in E. Bewijs dat $ED=EC$ is.

Oplossing:




Geg. $\triangle ABC$. $\angle C=90°$

⊙M om $\triangle ABC$

MN is middelloodlijn van AB.

l raakt ⊙M in C.

MN snijdt AC in D en l in E.

Te bew. $ED=EC$.

Bewijs: $\angle AEC=\angle ABC$ (beide $\frac{1}{2}$ bg AC).

We gaan trachten aan te toonen, dat $\triangle$ CED gelijkbenig is.

Daartoe vergelijken we $\triangle MDA$ met $\triangle CBA$.

$\angle A=\angle A$

$\angle AMD=\angle ACD.$

Dus is: $\angle MDA=\angle CBA$

$\angle MDA=\angle EDC$

Dan is: $\angle EDC=\angle CBA$

$\angle CBA=\angle ACE$ (of ECD)

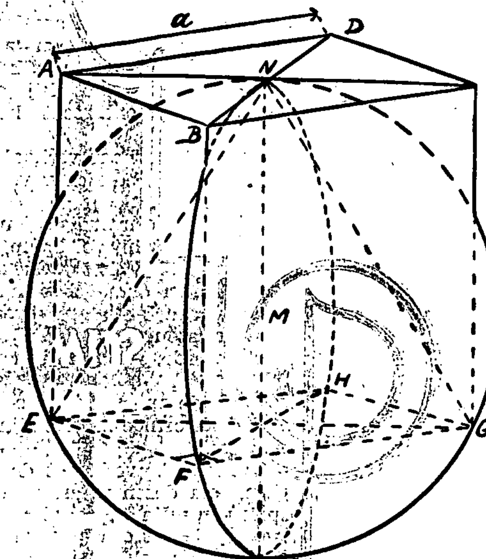
Dus is: $\angle EDC=\angle EDC.$

Dan is $\triangle$ CED gelijkbenig.

Dan is $ED=EC$.

4. Een bol gaat door de hoekpunten van het grondvlak van een kubus en raakt aan het bovenvlak van die kubus.

Bereken de straal van die bol, als de ribbe van de kubus a is.




Oplossing: ⊙M is omgeschreven cirkel van $\triangle EGN$. De straal van deze cirkel noemen we R en deze is gelijk aan de straal van de bol.

Van $\triangle EGN$ berekenen we de zijden

$EG=a$

$EG=a$

Dus $EG=a\sqrt{2}$.

$NC=\frac{1}{2}EG=\frac{1}{2}a\sqrt{2}$

Dus $NG=\sqrt{(\frac{1}{2}a\sqrt{2})^2+a^2}$

$=\frac{1}{2}a\sqrt{6}.$

NE is ook $\frac{1}{2}a\sqrt{6}$.

We berekenen de opp. van $\triangle EGN$.

Deze is $a\sqrt{2}\times\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}a^2\sqrt{2}$.

We passen nu toe de formule $R=\frac{abc}{4O}$

$$R=\frac{a\sqrt{2}\times\frac{1}{2}a\sqrt{6}\times\frac{1}{2}a\sqrt{6}}{4\times\frac{1}{2}a^2\sqrt{2}}=\frac{3}{4}a.$$

De straal van de bol is dus $\frac{3}{4}a$.


Rotterdam Z. M. P. Nijsse.

net gelaat van ... vertellen over haar

„On... is ... toen hij de lagere school hier ter plaatse bezocht, prees men hem om zijn ijver en leergierigheid. Toen moest hij een vak gaan leeren, want u begrijpt wel, dat hij als oudste zoon van ons talrijk gezin spoedig moest meehelpen len kost te verdienen". Dan vertelt de moeder, dat Jan evenals de andere kinderen, 5 flinke zoons en 4 dochters, die allen een goed bestaan hebben verworven, zeer muzikaal was en niets liever deed dan knutselen. Aangezien er te Grave nagenoeg geen industrie is, had men de keus den jongen sigarenmaker of goudsmid te laten worden.

Na eenig beraad besloot men tot het laatste.

De jeugdige Hondong had echter weinig zin in het goudsmidsvak.

Hij wilde hooger op, doch aan de aviatiek dacht hij allerminst.

Toen hij in 1913 zijn dienstplicht moest vervullen, nam hij de gelegenheid te baat, de goudsmidswerkplaats voor altijd vaarwel te zeggen. Hij besloot in militairen dienst te blijven en bracht het al spoedig tot sergeant. In dien tijd ging hij bij de opleiding tot vliegenier te Soesterberg en spoedig was hij een allround piloot.

Kort nu zijn huwelijk, negen jaar geleden, werd de aandacht van de K. L. M. op den kranigen sergeant-vlieger gevestigd en zij deed hem een aanbieding bij haar in dienst te treden. Dit was het begin van een succesvolle loopbaan. Als gezagvoerder heeft hij achttien reizen naar de Oost gemaakt. Aan ervaring ontbreekt het hem dus niet.

In sobere bewoordingen doet het moedertje haar verhaal, de geschiedenis van een braven, eenvoudigen jongen, die door volharding en energie het zoo ver heeft gebracht.

„Onze Jan is altijd dezelfde rondborstige eenvoudige jongen gebleven", vervolgt moeder Hondong. „Steeds was hij vol liefde en hartelijkheid voor ons en zijn broers en zusters. Bij het vertrek van de Snip, toen de toegestroomde menigte het hem onmogelijk maakte de microfoon te bereiken, heeft hij toch nog een specialen groet voor vader en moeder door den radio-omroeper laten overbrengen en steeds als hij van een Indië-vlucht huiswaarts keerde, vloog hij over Grave om ons toe te wuiven".

Daar vader Hondong ziek was, hebben de ouders hun zoon niet op Schiphol goede reis kunnen wenschen, doch eenige zusters zijn bij het vertrek van de Snip tegenwoordig geweest.

„Natuurlijk zijn wij trotsch en dankbaar", verklaart de moeder, „dat men onzen zoon heeft uitgekozen, om dezen verantwoordelijken post te bezetten. Doch het zal een pak van mijn hart zijn, als hij veilig de zee is overgestoken. Nu leven wij slechts op de radioberichten. Het doet ons echter goed, dat heel Holland en ook West-Indië met ons meeleeft. Onze beste gedachten en wenschen vergezellen hem".

**Beantwoord nu de volgende vragen.**

1) Wat is de „Maandagmorgen" en wat zegt je deze naam?
2) Waarom ging men de familie Hondong bezoeken?
3) Hoeveel kinderen hebben vader en moeder Hondong groot gebracht?
4) Waaruit blijkt, dat het flinke kinderen zijn?
5) Waarom werd Jan Hondong niet naar de H.B.S. gestuurd? De afstand naar de naastbijgelegen H.B.S. was toch niet zoo groot.
6) Vertel in het kort, wat Jan Hondong na het doorloopen der lagere school achtereenvolgens geweest is.
7) In welk jaar kwam J. Hondong bij de K. L. M. in dienst?
8) Was Hondong al getrouwd, toen hij voor 't eerst naar Indië vloog? Waarom denk je dit?
9) Moeder zegt, dat Jan Hondong zooveel van zijn ouders houdt. Waaruit blijkt, dat zijn moeder gelijk heeft?
10) Wat ben je uit dit verhaaltje nog meer te weten gekomen over het karakter van Jan Hondong?
11) Waarom koos de K. L. M. voor de West-Indië-vlucht een piloot met rijke ervaring als gezagvoerder?
12) Noem enkele punten van verschil op tusschen de West-Indië-vlucht en de bekende Uiver-vlucht naar Melbourne.
13) Was de Snip al in West-Indië aangekomen, toen het persgesprek met moeder Hondong plaats vond? Licht je antwoord toe.
14) Er staat in het stukje, dat het moedertje haar verhaal in sobere bewoordingen deed. Wat wordt daarmee bedoeld?
15) Wat bedoelt moeder Hondong als ze zegt: „We leven nu slechts op de radioberichten"?

A. ... schen haakjes geplaatste woord...

1. In de krant staat, dat er in toko Java groote opruiming is wegens opheffing der zaak. (opgeheven)
2. Er is geen sprake van dat je overgaat. (uitgesloten)
3. Na 31 Mei zullen er tusschen P. en H. geen autobussen meer loopen. (autobus-verbiding)
4. Dr. Otten heeft veel gedaan voor de bestrijding van de pest. (verdienstelijk)
5. Vader vond het niet goed, dat wij tweemaal in één week naar de bioscoop zouden gaan. (bezwaar)
6. Als je hem goed opneemt kun je zien, dat hij vroeger in beteren doen moet hebben verkeerd. (uiterlijk)
7. Daar de kassier niet genoeg verdiende om zoo royaal te kunnen leven, vergreep hij zich aan 't geld van anderen. (toereikend)
8. De Grieken stelden de wijsheid voor door eer uil. (zinnebeeld)
9. De jongens hadden geen echten voetbal; ze maakten een prop van oude lappen en toen ging het ook. (behelpen)
10. Wim vertelde Moeder precies, wat er op het schoolfeest was gebeurd. (beschrijving)

B. Schrijf over en vul de juiste voorzetsels in:

1. Deze tokohouder zal alles ......... inkoopsprijs opruimen. Dit beteekent dat hij alle waren ......... winst ......... de hand zal doen.
2. ......... deze slechte tijden staan veel winkeliers ......... de keus, hun zaken te sluiten of zich ......... een geringe winst tevreden te stellen.
3. Er is een groot verschil ......... willen doen; heel wat menschen zijn vol goede voornemens, maar deze komen zelden ......... uitvoering.
4. Als je je ......... den verkoop ......... mijn auto wilt belasten, zul je aandeel ......... de opbrengst hebben, en wat je er ......... de duizend gulden voor krijgt hoef je heelemaal niet ......... mij af te dragen.
5. Je hoeft niets ......... mijn woorden te zoeken: ik heb je precies gezegd hoe ik ......... de zaak denk.
6. Als ik die eene schrijffout ......... beschouwing laat, valt er ......... je werk niets aan te merken.
7. ......... den grond ......... mijn hart dank ik je ......... den grooten dienst, dien je mij bewezen hebt ......... de moeilijkheden, waarin je zelf verkeerde.

C. Zet de tusschen haakjes geplaatste werkwoorden in den juisten vorm.

1. In alle tijden (bewonderen) men de Kozakken om den moed en onverschrokkenheid, die ze (toonen).
2. Bovenal (krijgen) ze bekendheid als dappere ruiters en in den grooten wereldoorlog (geven) ze van hun rijkunst herhaaldelijk bewijzen.
3. De Oostenrijkers (lokken) eens enkele Kozakken in een hinderlaag en hen gevankelijk (meevoeren).
4. Hun generaal, die altijd (beweren) een meesterlijk ruiter te (zijn), (kunnen) echter met het paard van een der Kozakken niet overweg.
5. „(Brengen) den man, aan wien dit paard (behooren), bij mij!" (zijn) zijn bevel.
6. Toen de Kozak (komen) en de generaal hem (gebieden), om het paard tot loopen te dwingen, (springen) de Kozak achter den generaal op het paard.
7. Voor de generaal erop verdacht (zijn), (inslaan) het paard de richting van het Russische kamp.
8. Uit vrees, dat ze hun generaal (treffen), (wagen) de Oostenrijkers het niet te schieten.
9. Toen ze weer tot bezinning (komen), (verdwijnen) het paard met zijn berijders al uit het gezicht.
10. Natuurlijk (opwekken) deze gevangenneming in het Russische kamp de algemeene bewondering.

D. 1. Ontleed den volgenden zin redekundig:

De zorg voor haar kleine kinderen werd de arme weduwe te zwaar.

2. Benoem alle woorden taalkundig.

# IN CAUDA VENENUM

DOOR

E. J. DIJKSTERHUIS.

---

De Commissie, die in het voorjaar 1930 door het Bestuur van de Algemeene Vereeniging van Academisch gevormde leeraren is ingesteld met de opdracht, het vraagstuk van de Nederlandsche Leeraarsopleiding in studie te nemen, heeft het resultaat van haren arbeid neergelegd in een Rapport [1]), waarin na een reeks van algemeene beschouwingen een plan voor een doelbewuste organisatie van zulk een opleiding wordt ontwikkeld en waaraan verder nog acht bijlagen zijn toegevoegd, waarin de toepasbaarheid van de voorgestelde regeling voor de verschillende vakken afzonderlijk wordt nagegaan.

Het is niet mijn bedoeling, dit Rapport hier volledig te bespreken; het vertoont nl. op de meest belangrijke punten, zoowel in motiveering als in conclusie, een, zooals de Commissie zelve opmerkt, alleszins verheugende overeenstemming met de voorstellen der Commissie-Sijmons; waar echter deze laatste na uitvoerige bespreking in vergaderingen en in de pers van algemeene bekendheid kunnen worden geacht, zal het resultaat van den arbeid der nieuwe Commissie met voldoende duidelijkheid te omschrijven zijn, wanneer we in het licht stellen, op welke punten zich hare meening principieel van die der Commissie-Sijmons onderscheidt.

Dat zijn er, als ik goed zie, slechts twee: ten eerste wil de Commissie-Muller — wat, haar oorsprong in aanmerking genomen, niemand kan verwonderen — de leeraarsopleiding uitsluitend aan de universiteit opdragen; ten tweede wil zij de docentvorming

---

[1]) Rapport uitgebracht door de Commissie inzake de Leeraarsopleiding ingesteld door het Bestuur der Algemeene Vereeniging van Academisch gevormde leeraren. Groningen enz. (J. B. Wolters) 1932.

geheel los maken van de zuiver wetenschappelijke opleiding der Universiteiten en de deze onderzoekende examina. [2])

Ik zal over geen van beide punten gaan redetwisten; over het eerste niet, omdat ik in deze zaak, waarin ik de denkbeelden aanvaard, die door de Commissie-Beth in haar derde rapport [3]) zijn uitgesproken, nu eenmaal op een zoo geheel ander standpunt sta dan de Vereeniging van Academisch gevormde leeraren, dat er van een vruchtbare gedachtenwisseling nauwelijks sprake kan zijn; over het tweede niet, omdat ik het bestaansrecht van de opvatting, die de Commissie hierover heeft, zeer wel erken, al voel ik er om practische redenen meer voor, den a.s. leeraar niet al te lang op de voorbereiding tot zijn maatschappelijke taak te laten wachten.

Ik zou dan ook geen aanleiding hebben gehad, iets over het rapport in het midden te brengen, wanneer daaraan niet, als achtste en laatste bijlage, een memorie van de hoogleeraren Bremekamp, Droste en Wolff was toegevoegd, waarin het brandende vraagstuk der leeraarsopleiding behandeld wordt op een wijze, die mij tot tegenspraak prikkelt.

Alvorens die bijlage zelf te behandelen, wil ik een opmerking maken over de wijze, waarop de wiskunde in de commissie vertegenwoordigd is geweest. Het trekt nl. de aandacht, dat, terwijl voor alle andere vakken naast één vertegenwoordiger van het M. en V.H.O. één van het H.O. zitting heeft gehad, men voor wiskunde naast één leeraar drie hoogleeraren aantreft. Over de motieven, die tot deze onevenwichtigheid hebben gevoerd, tast ik natuurlijk in het duister; over de gevolgen, die er uit zijn voortgevloeid, blijft men echter, het rapport lezende, niet lang in twijfel. Het valt nl. spoedig op, dat telkens, als de wenschelijkheid en mogelijkheid van leeraarsopleiding ter sprake komt, „de meeste vertegenwoordigers der wiskunde" tegenover het streven der Commissie een skeptisch, men zou haast zeggen, een vijandig standpunt innemen: over levensvatbaarheid en nut van een opleiding denken zij „gereserveerd" (blz. 7); ten aanzien van het vruchtbaar maken van

---

[2]) In de passage, waarin dit vermeld wordt (blz. 16) is door den Redacteur van het Weekblad voor Gymn. en M.O. van 23 Maart 1932, blz. 1003, juist het tegenovergestelde gelezen. Dit is blijkbaar een misverstand, waartoe een onduidelijkheid in den zinsbouw aanleiding heeft gegeven.

[3]) Nadere Beschouwingen over de opleiding tot leeraar in wis- en natuurkundige vakken. Groningen (Noordhoff) 1926.

wetenschappelijke vakkennis voor V.H. en M.O. teekent zich bij hen „een bepaalde tegenstand" af (blz. 10). De Commissie deelt zelf mee, dat deze „meeste vertegenwoordigers der wiskunde" de drie hoogleeraren waren (blz. 7); het meeningsverschil tusschen de maximale meerderheid en de minimale minderheid van de subcommissie voor wiskunde blijkt dus een meeningsverschil tusschen vertegenwoordigers van het Hooger Onderwijs eenerzijds van Middelbaar en Voorbereidend Hooger Onderwijs anderzijds geweest te zijn, zoodat het niet onredelijk is, te vermoeden, dat bij voldoende evenwichtigheid van vertegenwoordiging van een numerieke meerderheid der tegen de strekking van het rapport gestemde leden niets zou zijn gebleken. Het is te betreuren, dat de Commissie dit niet schijnt te hebben ingezien; nu toch wekt het rapport den indruk, alsof er eigenlijk op het gebied van de wiskunde (het vak met de grootste didactische moeilijkheden, welks bestaansrecht, niet het minst in verband daarmee, het felst wordt omstreden) nauwelijks behoefte aan een hervorming van de leeraarsopleiding zou bestaan.

Ik wil er daarom hier nog eens de aandacht op vestigen, dat onder de verschillende stroomingen, die in de laatste jaren tot het in behandeling nemen van het vraagstuk der opleiding hebben gevoerd, zeker niet de minst krachtige van de zijde der wiskundigen is gekomen. De Commissie-Beth heeft in 1926 reeds verbetering van de leeraarsopleiding bepleit als eerste voorwaarde voor een vruchtdragende hervorming van het wiskunde-onderwijs [4]); de commissie-Verrijp, ingesteld door alle samenwerkende vereenigingen van wiskunde-leeraren, heeft daarna een gedetailleerd plan voor die verbetering op het gebied van wiskunde ontworpen [5]); zij was het, die de A.V.M.O. verzocht heeft, het initiatief voor een algemeene beweging voor verzorging van de leeraarsopleiding te nemen, aan welk initiatief de Commissie-Sijmons haar ontstaan te danken heeft gehad. Deze commissie, heeft, wat de wiskunde betrof, steeds op den arbeid der commissie-Verrijp kunnen voortbouwen; in hare besprekingen was het steeds de wiskunde, die altijd weer argumenten voor en voorbeelden van leeraarsopleiding

---

[4]) E. J. Dijksterhuis, Beschouwingen over de universitaire opleiding tot leeraar in wis- en natuurkunde. Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, II (1926).

[5]) De universitaire opleiding tot leeraar in wiskunde en aanverwante vakken. Weekblad voor G. en M.O. van 1 Juni 1927.

kon leveren; en wanneer zich daar eens de vakverschillen afteekenden, waarvan het nieuwe rapport op blz. 7 spreekt, nam de wiskunde er een positie in, die juist tegenovergesteld was aan die, waarin ze zich bij de commissie-Muller vertoonde. Zoodat men wel eenigszins den indruk krijgt dat deze over de verlangens inzake opleiding, die er onder de leeraren in wiskunde bestaan, niet al te best ingelicht is geweest.

Die indruk nu wordt met de grootste scherpte bevestigd, wanneer men de bovenbedoelde achtste bijlage leest. Ik wil, om dit te laten zien, eerst kort haar inhoud samenvatten:

Na een volkomen juiste beschouwing over den wantoestand, dat de Nederlandsche leeraar belast wordt met een schooltaak, die hem in het algemeen geen tijd voor wetenschappelijk werk overlaat, wordt betoogd, dat de a.s. leeraar aan de Universiteit voldoende wetenschappelijk wordt gevormd, om zich, als hij in functie treedt, zonder speciale voorbereiding in de elementaire onderwijsstof te kunnen inwerken; het wordt dan ook overbodig geacht, deze stof aan de Universiteit „van hooger standpunt" te gaan beschouwen en er wordt zelfs een voordeel in gezien, dat hij genoodzaakt zal zijn uit eigen kracht aan te vullen, wat hem blijkt te ontbreken, omdat daardoor zijn lessen persoonlijker en levendiger zullen worden. Van paedagogisch-didactische vorming wordt, zoo al eenig, dan toch slechts beperkt nut verwacht; de gedachte, eenigen dwang tot het volgen van zulk een opleiding uit te oefenen, wordt verworpen. Gewenscht wordt, dat de a.s. leeraren af en toe eens bij ervaren docenten zullen hospiteeren en een enkele maal hun lessen zullen overnemen; goede resultaten worden verwacht van werkzaamheid van den a.s. leeraar in een avondklasse, waar zwakke leerlingen worden gesteund en bijgewerkt. Het voorstel door de commissie-Sijmons gedaan, om op het doctoraal-examen, waarbij onderwijsbevoegdheid wordt verlangd, eischen inzake de didactiek van het hoofdvak te stellen, wordt met de grootste beslistheid afgewezen. De schrijvers zijn van meening, dat *„mocht men toch overgaan tot het stellen van dezen eisch, het wetenschappelijk peil van den gemiddelden leeraar zal dalen en de scholen voor M.O. en V.H.O. dientengevolge het eenige wezenlijke kenmerk zullen verliezen, dat hen van U.L.O. scholen onderscheidt"* (cursiveering van mij).

Tot zoover de sub-commissie, welker oordeel men dus kan recapituleeren als de volstrekte veroordeeling van alle denkbeelden over

de opleiding tot leeraar in wiskunde, die door de Commissies Beth, Verrijp en Sijmons in den loop van de laatste zes jaren zijn ontwikkeld.

Men kan zich nu, om te beginnen, moeilijk onttrekken aan den indruk, dat die veroordeeling wel wat erg apodictisch en ongemotiveerd wordt uitgesproken. Wanneer zich in de kringen der wiskundeleeraren een ontevredenheid openbaart met de opleiding tot hun ambt, die ze aan de Universiteit hebben ontvangen (of liever met het feit, dat hun die opleiding werd onthouden), wanneer die ontevredenheid zich uit in het opstellen van uitvoerige, door voorbeelden toegelichte en door argumenten gesteunde hervormingsplannen, wanneer die plannen in vergaderingen kunnen worden besproken en in tijdschriften behandeld, zonder dat van eenige noemenswaarde oppositie in de kringen der leeraren blijkt, dan doet het toch wel wat wonderlijk aan, wanneer drie vertegenwoordigers van het instituut, op welks inrichting en werkmethoden de tot uiting komende kritiek zich in de eerste plaats richt, zonder een spoor van argumentatie hunnerzijds komen verklaren, dat er aan die inrichting en die werkmethoden niets ontbreekt!

Des te wonderlijker doet dit aan, wanneer men er bij bedenkt, dat in het jaar 1927 door de faculteit van Wis- en Natuurkunde te Utrecht, waartoe de heer Wolff toen toch reeds behoorde en door die te Leiden, waarmede de heer Droste toen toch reeds in nauw contact stond, op een vraag van de Commissie-Verrijp volmondig is toegegeven, dat de door de Commissie-Beth tegen de universitaire opleiding van den wiskunde-leeraar aangevoerde bezwaren, inderdaad bestonden. „Dat de in het rapport genoemde leemten de Universitaire Opleiding aankleven geven wij toe", schreef de faculteit te Leiden [6]) en zij voegde er aan toe, dat het uitsluitend de drukke werkzaamheden van de drie docenten in wiskunde en mechanica waren, die haar belette, de gewenschte verbeteringen tot stand te helpen brengen. De faculteit te Utrecht antwoordde, „dat zij van meening was, dat er leemten van den bedoelden aard bestaan" en dat „de meerderheid der Commissie, uit haar midden aangewezen, in beginsel genegen is, de verwezenlijking dier denkbeelden te bevorderen" [7]).

---

6) l.c. blz. 2 (overdruk).
7) l.c. blz. 4 (overdruk).

Het is toen bij deze verklaringen gebleven; de faculteiten, hoewel toegevende, dat de leeraarsopleiding aan de Universiteit onvoldoende werd verzorgd, hebben (door oorzaken of om redenen, die zich aan mijn beoordeeling onttrekken) de bezwaren, welker bestaan zij toegaven, niet kunnen of niet willen verbeteren. Thans echter komen de heeren Bremekamp, Droste en Wolff verklaren, dat er, voorzoover de Universiteit betreft, heelemaal geen bezwaren bestaan! En sterker, zij zien in de plannen der Commissie-Sijmons, die, wat de wiskunde aangaat, niets anders zijn dan de practische uitwerking van de denkbeelden, die de faculteiten in 1927 weliswaar niet konden verwezenlijken, maar die zij dan toch met sympathie aanvaardden, een zoo groot gevaar voor het peil van het universitaire onderwijs, dat zij komen tot het neerschrijven van de groteske overdrijving, die ik boven door cursiveering onder de bijzondere aandacht van den lezer heb gebracht.

Groteske overdrijving; het woord is waarlijk niet te kras. Want men roepe zich eens voor den geest, hoe de door de Commissie-Sijmons gewenschte studie vóor een doctoraal-examen wiskunde met de didactiek en methodiek hiervan als een der bijvakken volgens de uitwerking van haar algemeene plannen, die ik in 1930 voor de Groningsche Faculteitsvereeniging heb gegeven en die daarna in De Gids is gepubliceerd [8]), zou zijn ingericht. Men stelle zich eens voor, dat de a.s. doctorandus in de wiskunde *naast* de wetenschappelijke onderwerpen, die hij thans reeds bestudeert en *in de plaats van* een der bijvakken systematisch studie maakte van de elementaire wiskunde, zoowel van het betrekkelijk kleine deel daarvan, dat binnen de grenzen der schoolstof valt als van de veel ruimere gebieden, die daarbuiten liggen, maar waarmee vertrouwdheid ter wille van een waarlijk souvereine beheersching dier stof gewenscht is, dat hij de geschiedenis van zijn wetenschap leerde kennen, dat hij in haar licht de vorming van de methoden, de nomenclatuur, de notatie en de stofkeus der later te behandelen onderwerpen leerde begrijpen en de moeilijkheden leerde beseffen, die de menschheid bij de schepping der wiskunde te overwinnen heeft gehad, om daardoor beter de bezwaren te begrijpen, die haar kennisname aan den leerling van onzen tijd in den weg legt; dat hij

---

[8]) E. J. Dijksterhuis, De opleiding tot leeraar bij het Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs volgens de plannen der Commissie-Sijmons. De Gids XCIV (1930). No. 10.

zich leerde orienteeren in de omvangrijke literatuur over de techniek van het later te doceeren vak en vertrouwd werd gemaakt met de verschillende methoden, die voor het onderwijs ten dienste staan; dat hij aanleiding kreeg, zich te verplaatsen in en aan te passen aan het geestelijk peil en bevattingsvermogen van zijn toekomstige leerlingen; dat hij in verband hiermee kritisch kennis leerde nemen van de beschikbare leerboeken en andere stoffelijke hulpmiddelen; dat hij leerde nadenken over het doel, dat hij met zijn onderwijs wil bereiken. Men stelle zich eens voor, dat de scholen voor M. en V.H.O. doctorandi, die theoretisch zoo waren voorbereid en die daarnaast nog een practische opleiding hadden genoten, als beginnende leeraren kregen. Wat zou het gevolg zijn? De heeren Droste, Bremekamp en Wolff komen het ons vertellen: Burgerschool en Gymnasium zouden het eenige wezenlijke kenmerk verliezen, dat ze thans nog van U.L.O.scholen onderscheidt.

De schrijvers van de bijlage zullen mij er niet van kunnen beschuldigen, dat ik hun meeningen toedicht, die zij niet hebben uitgesproken. Immers ze spreken over de mogelijkheid van het stellen van den eisch van paedagogiek en didactiek op het doctoraalexamen wiskunde; die eisch is echter door niemand anders gesteld dan door de commissie-Sijmons en door niemand anders uitgewerkt dan door mij. Het is dus slechts „substituer les définitions à la place des définis”, wanneer ik hun woorden betrek op de plannen, die ik in 1930 te Groningen heb meegedeeld.

Die plannen ondervonden daar destijds ook kritiek van de zijde der hoogleeraren in wiskunde, maar, merkwaardig genoeg, kritiek van een geheel andere strekking, dan die de schrijvers der achtste bijlage erop uitoefenen. Er werd daar geklaagd, dat mijn verlangens te ver gingen, gewaarschuwd voor overlading van den student. De vrees, dat de studie der didactiek den academisch gevormden leeraar zou doen dalen tot het ontwikkelingspeil van den onderwijzer, werd daar echter niet gekoesterd, noch heb ik haar ooit elders in binnen- of buitenland hooren uitspreken. De opvatting van de schrijvers is, wat men er verder ook over moge denken, althans volkomen origineel!

Daarmee is dan echter, naar mijn gevoel, ook wel haar eenige verdienste uitgesproken. Men lette b.v. nog eens op de merkwaardige rol die zij in de studie van de wiskunde aan het tweede bijvak toekent. Een doctorandus met hoofdvak wiskunde en twee

„wetenschappelijke" bijvakken, heeft voor zijn leven een vorming ontvangen, die hem nu verder in staat stelt, aan alle eischen, die het onderwijs met zich meebrengt, uit eigen kracht te voldoen. Vervangt men een dier „wetenschappelijke" bijvakken door de studie van didactiek, methodiek en historie van het hoofdvak (er wordt blijkbaar aangenomen dat dit in ieder geval geen wetenschappelijke studie zal kunnen zijn), dan zal „de weg tot het leeraarschap worden geopend voor personen, van wie voor de wetenschappelijke vorming der leerlingen weinig te verwachten valt" en dan zal de boven vermelde degradatie van het Middelbaar en Voorbereidend Hooger Onderwijs onfeilbaar plaats hebben. Staat en valt dan dus de waarde der universitaire studie met het tweede bijvak?

De besproken uitlating is niet de eenige, die mij in de bijlage VIII hindert. Minder prettig doet b.v. ook de wijze aan, waarop de schrijvers, zonder eenige nieuwe motiveering, na alles, wat daarover in de laatste jaren reeds is gezegd en wat ook in het rapport zelf weer wordt aangestipt, met de oude phrase aankomen, dat het zoo mooi is, wanneer de aankomende leeraar uit eigen kracht de moeilijkheden van het begin overwint. Ik zou slechts in herhalingen vervallen, wanneer ik de leegheid van een dergelijke bewering nog weer eens opnieuw ging aantoonen[9]); als de schrijvers er een inhoud aan toe kunnen kennen, zouden ze toch minstens, onder weerlegging van wat er al tegen beweerd is, hun meening hebben moeten motiveeren. Met de opstelling van apodictische machtspreuken wordt het vraagstuk van de opleiding niet gediend.

Ten slotte krijgt men den indruk, dat, wat de schrijvers in de bijlagen VII en VIII als positieve bijdrage tot de oplossing van dit vraagstuk aanbieden, meer voortgekomen is uit den wensch, althans niet met geheel leege handen voor den lezer te staan dan uit de overtuiging, dat langs den aangegeven weg werkelijk een duidelijk waarneembaar en ook in hun eigen oog belangrijk voordeel zou zijn te verkrijgen. In Bijlage VII wordt gesproken van oefeningen in practische didactiek onder leiding van een ervaren docent, waartoe de leiders van instellingen van V.H. en M.O. gelegenheid zullen kunnen geven; in Bijlage VIII heet het vager: af en toe eens hospi-

[9]) Zie b.v. in het in noot 4 vermelde artikel blz. 7 (overdruk) en in het in noot 8 vermelde blz. 19 (overdruk).

teeren bij ervaren docenten en een enkele maal diens les overnemen; bovendien komen daar dan de boven reeds vermelde avondklassen ter sprake.

Ik kan nu niet inzien, dat deze voorstellen meer zijn dan een oppervlakkig aanwijzen van de richting, waarin een gelegenheid tot practische oefening te verkrijgen zou zijn; immers vooreerst wordt over alle vragen betreffende de organisatie van zulk een oefening gezwegen, terwijl het niet aan te nemen is, dat de schrijvers op dit punt het rapport der Commissie wèl zouden onderschrijven, omdat de daarin ontwikkelde plannen voor een verplichte leeraarsopleiding na de universitaire studie toch heel wat verder gaan dan vage wenschen van „af en toe" en „een enkelen keer". Verder komt men niet te weten, of de schrijvers, die van allen dwang tot het volgen van paedagogische colleges afkeerig zijn, op het stuk van de practische oefeningen althans eenige pressie op den student willen uitoefenen of dat zij hem geheel vrij willen laten, zich al of niet practisch voor te bereiden; ook blijkt niet, wat er gebeuren zal, wanneer hij bij die oefeningen eigenschappen vertoont of bij zich zelf ontdekt, die hem waarschijnlijk ongeschikt zullen maken voor het leeraarsambt. Van de avondklassen, die „voor jaren" eens te Amsterdam hebben bestaan, stel ik me ook niet al te veel voor; de organisatie zal daar heel moeilijk zijn, wanneer men bereiken wil, dat iedere student de gelegenheid tot oefening krijgt; de leiding zal er ontbreken; en ten slotte is bijwerken of bij huiswerk ondersteunen iets geheel anders dan lesgeven; ieder weet wel, welk een illusie van helderheid men bij zich zelf en anderen kan opwekken, wanneer men de laatste hand legt aan de resultaten van het onderwijs van anderen en als de leerling nu ineens alles begrijpt, wat hem op school zoo duister was; bovendien zijn alle moeilijkheden van het voorbereiden van een les, van het klassikaal doceeren, van het orde-houden enz. bij zulke gelegenheden uitgeschakeld. En de schrijvers deelen, ongetwijfeld op grond van eigen onderzoek, weliswaar mede, dat er uit de Amsterdamsche avondklassen zulke uitstekende docenten zijn voortgekomen, maar zulke mededeelingen gelijken te veel op de verklaringen, waarmee autoriteiten lastige vragers plegen af te schepen, dan dat ze, hoe waar ze dan ook mogen zijn, nog erg overtuigend zouden kunnen werken. En zoo laat ook het constructieve gedeelte der bijdrage een weinig bevredigenden indruk achter.

Samenvattend moet ik verklaren, dat de memorie van de hoogleeraren Bremekamp, Droste en Wolff voor mij een bittere teleurstelling is. De schrijvers hebben natuurlijk volkomen het recht, het streven van de leeraren in wiskunde om aan het jongere geslacht een betere opleiding tot het steeds meer eischende ambt te verschaffen, dan zij zelf ontvingen, als ongemotiveerd te veroordeelen; niemand zal het hun kwalijk kunnen nemen, wanneer ze de van die zijde afkomstige hervormingsplannen afwijzen, den bestaanden toestand in hoofdzaak verdedigen en, voorzoover ze wijziging wenschen, met eigen voorstellen daartoe komen. Maar men had van hen mogen verwachten, dat zij die veroordeeling zonder overdrijving en miskenning, die verdediging zonder phrasen en de toelichting van hun eigen plannen zonder vaagheid zouden hebben gegeven.

---

# DE DENKMOEILIJKHEDEN, GELEGEN IN HET FUNCTIEBEGRIP EN IN DE GRAFISCHE VOORSTELLINGEN

DOOR

H. J. E. BETH, Deventer.

---

Uit gesprekken en briefwisseling met vakgenooten krijg ik den indruk, dat het onderwijs in de grafische voorstellingen velen groote moeilijkheden geeft. Men klaagt, dat ondanks voortgezette en herhaalde pogingen de resultaten verre beneden de verwachting blijven; alleen de allerbeste leerlingen zouden in staat zijn, de aan die voorstellingen ten grondslag liggende en de ermede verband houdende begrippen te veroveren.

Men zou op grond van de in dezen tijd opkomende bezwaren tot het vermoeden komen, dat de grafische voorstellingen door velen pas onderwezen zijn sedert dit onderwerp tot de examenstof is gaan behooren. Degenen, die van de groote waarde van de bedoelde stof overtuigd zijn, zullen daarom het opnemen ervan in het eindexamen-programma des te meer toejuichen en in deze overweging een nieuw argument zien tegen te ver gedreven „vrijheid" in het onderwijs en voor het behoud van de uniformiteit in de opgaven bij het schriftelijke eindexamen. Degenen, die aldus redeneeren, moeten echter de zaak ook van den anderen kant bezien. Ook wanneer men op goede gronden overtuigd is van de groote waarde van bepaalde leerstof en daarom het opnemen daarvan in leer- en examenprogramma *gewenscht* acht, dan moet men toch nog ernstig nagaan, of dit opnemen ook *mogelijk* is. Deze laatste vraag zou in ontkennenden zin moeten beantwoord worden, indien inderdaad bleek, dat de leerstof, ook bij de grootste toewijding van de zijde van leerling en docent, niet kan verwerkt worden door de leerlingen, die het overige onderwijs behoorlijk kunnen volgen en die dus op onze school thuis behooren.

Deze vraag is van groot belang, ook in verband met een wellicht

op handen zijnde herziening van het programma, waarbij de invoering van de beginselen der infinitesimaalrekening zeker aan de orde zal komen. Immers, op hoe verschillende wijzen we ook over al deze dingen kunnen denken, op dit eene punt zijn we het stellig eens: als de grafische voorstellingen en het functiebegrip, dat er aan ten grondslag ligt, voor de leerlingen, die op onze school thuis behooren, te moeilijk zijn, dan kán en mág van het onderwijs in de beginselen van differentiaal- en integraalrekening, hoe beknopt dan ook, geen sprake zijn.

Ik overwoog dit alles voor de zooveelste maal opnieuw, toen ik dezer dagen het voorrecht had, twee Leidsche hoogleeraren, de een als niet-vakman, de ander als vakman, en daardoor ieder op eigen wijze, maar beiden even helder, overtuigd en overtuigend, hun wenschen op het gebied van het wiskunde-onderwijs te hooren uiteenzetten (Jg. VIII blz. 166—189). Ik heb beiden met bijna volkomen instemming aangehoord; het „bijna" heeft betrekking op een enkele beschouwing in het betoog van Professor Droste. Twee overwegingen hielden mij ervan terug, met den spreker omtrent dit eene punt in discussie te treden. In de eerste plaats zou ik voor de uiteenzetting van mijn meening meer tijd noodig gehad hebben dan ik van de vergadering dorst vragen; in de tweede plaats weerhield schroom mij, in dezelfde of andere bewoordingen te herhalen, wat ik reeds meerdere malen gezegd en geschreven heb. De zaak schijnt mij echter bij nader inzien te belangrijk, dan dat ik er het zwijgen toe zou mogen doen; vandaar, dat ik thans op deze plaats de boven aangeduide vraag, die met mijn zooeven bedoeld bezwaar in nauw verband staat, aan de orde stel op eenigszins grondiger wijze, dan waarop ik haar vroeger in dit tijdschrift (Jgg. III, blz. 110) reeds behandeld heb.

Van de beide vragen: 1o. is de behandeling der grafische voorstellingen en die van het functiebegrip, en, als noodzakelijke consequentie daarvan, die van de beginselen der infinitesimaalrekening, wenschelijk? en 2o. is zij mogelijk? zal derhalve thans alleen de tweede besproken worden.

Van een behandeling van de 1ste vraag kan immers thans worden afgezien. Zij is ook ten onzent reeds vaak aan de orde gesteld. Ik wijs slechts op de uiteenzetting in het concept-leerplan, dat men in Jg. II (toen nog „Bijvoegsel") vindt (blz. 113), op de voordracht van Gerrits (Jg. VIII blz. 143 en van Post Jg. VIII blz. 297) als

voorbeelden uit vele. Ook de beide hoogleeraren hebben in hun boven bedoelde voordrachten juist *deze* vraag besproken, en zij hebben zich uit den aard der zaak, daar zij het onderwerp van het hooger onderwijs uit beschouwden, bijna geheel tot deze beperkt, aan het middelbaar onderwijs overlatende, de mogelijkheid der verwezenlijking hunner wenschen te onderzoeken.

Bij de beoordeeling van de vraag, of een behandeling van de grafische voorstellingen en het haar ten grondslag liggend functiebegrip met als natuurlijk eindpunt het begrip van de veranderlijkheid der functie en de vragen, waartoe deze aanleiding geeft, op onze scholen mogelijk is, kan men den experimenteelen weg en den theoretischen kiezen. Indien het proefondervindelijk onderzoek een stellig antwoord gaf, dan zou ieder zich daarbij getroost hebben neer te leggen, onverschillig, of het antwoord bevestigend dan wel ontkennend luidde. Als het theoretisch onderzoek tot een bepaald antwoord leidt, dan zal men daarmede *niet* tevreden zijn, maar een toetsing aan het experiment eischen, zoodat in elk geval aan de practijk het laatste woord moet gelaten worden.

Voor zoover ik heb kunnen nagaan, is van een afzonderlijk en opzettelijk onderzoek van den aard der moeilijkheden, die men overwinnen moet om de thans aan de orde gestelde begrippen te bemachtigen, nog geen sprake geweest. Het is mijn bedoeling een, zij het zwakke, poging te doen om met dit onderzoek een begin te maken. Het schijnt mij noodzakelijk, dat dit gebeurt, omdat het proefondervindelijk onderzoek, althans ten onzent, niet tot een beslissend antwoord heeft geleid.

De ervaringen, opgedaan reeds met het onderwijs in de grafische voorstellingen, schijnen de vakgenooten in twee partijen verdeeld te hebben. De eene wil, op grond van de ongunstige resultaten, waarvan boven sprake was, de invoering van het bedoelde onderwerp als een niet geslaagde proefneming veroordeeld zien. De andere wil de invoering van dat onderwerp slechts beschouwen als een eersten reglementairen stap op den weg van de vernieuwing van het wiskunde-onderwijs. Ik noemde twee partijen, maar twijfel niet aan het bestaan van een kleurlooze middenstof.

Waar beide partijen haar meening op practische ervaringen gronden, dringt zich de vraag op, wat de oorzaak kan zijn van dit meeningsverschil; immers mag men aannemen, dat niet een verschil

in bekwaamheid of van toewijding bij de vakgenooten of van het gehalte hunner leerlingen het genoemde verschil in resultaat teweegbrengt. Het is juist deze vraag, die tot een onderzoek, als boven bedoeld, naar de denkmoeilijkheden, aanleiding geeft; het onderzoek naar den aard der moeilijkheden voert vanzelf tot de vraag, of en zoo ja, hoe zij zijn te overwinnen.

Gemakshalve bepaal ik mij tot de expliciet gegeven eenwaardige algebraische functies. Het is mij bekend, dat men in den regel het onderwerp inleidt met het benaderend in teekening brengen en aan de hand daarvan onderzoeken van empirisch gegeven functies; de vraag, in hoeverre dit het tot stand komen van het begrip bevordert, laat ik buiten beschouwing, omdat ik geloof, dat het geven van een objectief antwoord op deze en dergelijke vragen niet wel mogelijk is, terwijl het mijn bedoeling is bij deze theoretische beschouwing zooveel mogelijk algemeen te blijven.

Ik denk dus neergeschreven de functie

$$y = F(x),$$

met de bedoeling haar grafisch voor te stellen en met behulp van de grafische voorstelling de waarheden op te sporen, die uit het gegeven functionale verband voortvloeien. Daartoe wordt de horizontale as geteekend, waarop de oorsprong en de positieve zin, benevens een verdeeling, is aangegeven (over de tweede as zal later gesproken worden). De vraag is nu, welke moeilijkheden het verstand heeft te overwinnen om te komen tot het verlangde inzicht in de aan de orde gestelde beschouwingen.

Daartoe behoort in de eerste plaats de verwerving van het inzicht, dat het de gedaante der functie is, die ons leert, welke reeks van bewerkingen men met een bepaalde getalwaarde, toegekend aan de onafhankelijk veranderlijke $x$, en constante getallen, die in de uitdrukking voor de functie optreden, moet uitvoeren, om tot de kennis van de bijbehoorende waarde der afhankelijk veranderlijke te komen. Dat men de hier gebruikte benamingen niet van den aanvang af zal invoeren, spreekt vanzelf.

In de tweede plaats de verovering van het inzicht, dat de uitdrukking der functie een veelheid van getallen vertegenwoordigt, waarvan elk met een of meer getallen van het geheel der getallen correspondeert.

De derde moeilijkheid is gelegen in het begrip van de afbeelding

van de waarde-verbindingen, die door de gegeven functie bepaald worden, op de punten eener door haar in gedaante en ligging bepaalde lijn.

Ik ga nu de drie genoemde moeilijkheden afzonderlijk na om te zien, in hoeverre de leerstof en haar wijze van behandeling de overwinning bevorderen kan.

De eerste moeilijkheid doet zich bijna niet als zoodanig gevoelen, omdat de behandeling van de hoofdbewerkingen bij voortduring aanleiding geeft tot toepassing van het begrip der substitutie. Om de in algebra gebruikte symbolen het eigendom van de leerlingen te doen worden, kent men aan de letters getalwaarden toe en laat op deze de voorgeschreven bewerkingen uitvoeren, zoodat een getal als resultaat voor den dag komt. Beschouwt men uitdrukkingen, waarin slechts één letter optreedt, en laat men in een en dezelfde uitdrukking verschillende getallen voor die letter substitueeren, dan is de eerste stap gedaan op den weg, die tot het functiebegrip moet voeren. Het is duidelijk, dat deze leerstof in de eerste klasse thuis behoort, waar men met de algebra begint en dus het gebruik van de symbolen bespreekt. Men kan de voor een bepaalde uitdrukking gevonden resultaten in een tabel vereenigen, waarbij het aan te bevelen is de opvolgende waarden, die men aan de onafhankelijk veranderlijke heeft toegekend, naast elkaar te schrijven en boven elk de bijbehoorende waarde der uitdrukking.

Veel dieper gelegen is de tweede der boven genoemde moeilijkheden, die hierop neerkomt, dat men de functie moet zien als een veelheid. De beschouwing van de eenheid, in dit geval de functie, als een veelheid, in dit geval de veelheid der waardeverbindingen, die de functie bepaalt, blijkt veel grooter bezwaren op te leveren, dan het omgekeerde, nl. de beschouwing van een veelheid als een eenheid.

Men merkt ditzelfde bezwaar op bij de eerste behandeling der meetkundige plaatsen. Wanneer men den cirkelomtrek definieert als de meetkundige plaats der punten, die alle denzelfden afstand tot een gegeven punt hebben, dan wil men die lijn zien als de veelheid der punten, die de genoemde eigenschap gemeen hebben. De leerlingen zijn echter gewoon geweest, die lijn als een eenheid te beschouwen; ze denken erbij aan een hoepel, aan den rand van een geldstuk of iets dergelijks; de beschouwing van de lijn als een veelheid is voor hen nieuw. Zij hebben echter *deze* opvatting van

den cirkelomtrek noodig voor de behandeling van constructieve opgaven. Wil men bijvoorbeeld in een rechte een punt bepalen, dat een afstand *d* tot een punt P heeft, dan kan men eerst de verzameling van alle punten beschouwen, die op den gegeven afstand *d* van dat punt P verwijderd zijn; hierna moet de gegeven rechte lijn gebruikt worden om uit de geheele verzameling die punten te zoeken, welke aan de vraag voldoen. De beschouwingswijze, waarbij men een lijn ziet als de veelheid der punten met een gemeenschappelijke eigenschap, biedt aanvankelijk moeilijkheden. Het duurt, naar mijn ervaring leert, geruimen tijd, voordat de leerlingen uit eigen beweging tot de toepassing van de methode der meetkundige plaatsen voor de behandeling der constructieve opgaven overgaan; zij nemen bij voorkeur hun toevlucht tot de beschouwing van een analyse-figuur. Dat echter de hier bedoelde moeilijkheid ten slotte overwonnen wordt, blijkt uit het gemak, waarmede zij zich later van de methode der meetkundige plaatsen bedienen. Bij het onderwijs in de stereometrie moet men hen er vaak aan herinneren, dat deze methode niet de eenige is.

Onderzoeken we nu, in hoeverre de klassieke leerstof der algebra gelegenheid biedt tot geleidelijke overwinning van de moeilijkheid, die we thans bespreken. *Het* onderwerp van de klassieke schoolalgebra is de vergelijking. In den regel gaat men tot de behandeling der vergelijkingen over, nadat de hoofdbewerkingen, die de inleiding der algebra vormen, besproken zijn. Nu schijnt het mij toe, dat deze wijze van doen aan het bereiken van het beoogde doel niet bevorderlijk is. Immers men bepaalt er zich bij het oplossen van een op nul herleide vergelijking toe, die waarden voor $x$ te zoeken, waardoor het eerste lid gelijk aan nul wordt; tot een nadere beschouwing van dat eerste lid gaat men niet over. Daardoor krijgt een vergelijking voor de leerlingen al spoedig de beteekenis van het beperkte stelsel van getallen, die men haar wortels noemt, en zij raken eraan gewoon, zich ten aanzien van een functie alleen te interesseeren voor de vraag, wanneer deze de waarde nul aanneemt. Het behoeft geen betoog, dat hun denken zich steeds verder verwijdert van het begrip van de veelheid der waarden, die de functie vertegenwoordigt.

De bezwaren, die men ondervindt, wanneer men de grafische voorstellingen in den loop van de derde klasse, dus, als de algebra haar einde nadert, voor het eerst aan de orde stelt, worden hierdoor

verklaard; de reeds voorhanden begrippen, die door langdurige oefening tot stand gekomen zijn, staan de vorming van het nieuwe begrip eerder in den weg dan dat zij haar bevorderen.

We gaan thans over tot de beschouwing van de derde der genoemde moeilijkheden, die gelegen is in het begrip van de afbeelding der waardeverbindingen, die de functie vertegenwoordigt, op de punten van een door haar bepaalde lijn. We komen er gemakkelijk toe, deze moeilijkheid te onderschatten als gevolg van de vele oefening, die ons eigen denken inzake afbeelding gehad heeft, waardoor wij het, ook onbewust, als machtig hulpmiddel gebruiken in de meest uiteenloopende werkzaamheden van den geest.

Het schijnt mij gewenscht, met de stelselmatige oefening in het afbeelden vroeg te beginnen. Men kan zich erover verwonderen, dat ik een behandeling in de eerste klasse aan durf prijzen van zaken, die velen onzer voor leerlingen eener hoogere klasse te moeilijk vinden. Echter, naar ik meen, ten onrechte. Hoeveel moeite de verovering van een bepaald begrip kost, hangt toch niet alleen af van de meerdere of mindere geoefendheid in het denken; ook de aard der reeds aanwezige begrippen is van invloed. Waar wij gewoon zijn, aan een bepaalde volgorde van behandeling der onderwerpen en aan bepaalde methoden van behandeling te denken, zijn wij gemakkelijk geneigd, de zooeven, ten overvloede uitgesproken, waarheid uit het oog te verliezen. Ik merkte dit weder op tijdens de discussie, die volgde op de voordracht van De Groot (in de belangrijke bijeenkomst, waarover ik boven reeds schreef) over het Dalton-stelsel (Jg. VIII blz. 189). Daarbij kwam men een oogenblik te spreken over het bewijs van de stelling, dat een rechte, die loodrecht staat op elke van twee snijdende lijnen van een vlak, loodrecht staat op elke rechte van dat vlak; het ging over de vraag, of men dit bewijs in de eerste klasse zou kunnen laten geven, nadat de congruentie van driehoeken behandeld is. In mijn omgeving vernam ik, dat de leerlingen hiermede in de vierde klasse nog groote moeite hebben; op dien grond meende men de vraag ontkennend te moeten beantwoorden. Ik heb op dit punt geenerlei ervaring en mag mij dus niet partij stellen, maar meen toch, dat men aldus zich te gemakkelijk van de zaak afmaakt. Afziende van de vraag, of een vroegtijdig aan de orde stellen van de ruimtelijke vraagstukken gewenscht is, en van de vraag, of dit met de Daltongedachte iets te maken heeft, wil ik de opmerking maken, dat ik in

het bedoelde onderwerp geen enkel element zien kan, waardoor het voor zoo jeugdige leerlingen in den grond te moeilijk zou zijn. Ik vermoed, dat zij niet meer moeite hebben om de ruimtelijke figuur te zien, dan enkele jaren oudere leerlingen, en dat zij de eenvoudige waarheid, die aan het groote aantal gebruikte paren congruente driehoeken ten grondslag ligt, eveneens zonder grooter inspanning herkennen.

Men kan de stelselmatige behandeling van het afbeelden beginnen met die van de natuurlijke getallen op aequidistante punten van een rechte, zooals ik vroeger (Jgg. V blz. 278) aangegeven heb, waardoor de invoering van het getal nul en van de negatieve getallen, en de optelling en aftrekking in het gebied der geheele getallen, verduidelijkt wordt. Deze afbeelding is de natuurlijke inleiding tot die van de door een functie bepaalde waardeverbindingen op punten van het vlak. Wanneer men de tabellen, waarvan boven sprake was, en die verkregen werden door in een bepaalde functie een aantal waarden voor $x$ te substitueeren, aanschouwelijker maakt door in de gekozen punten der getallenrechte loodlijnen te teekenen, die door haar lengte de bijbehoorende functiewaarde aangeven, dan ontstaat geleidelijk het begrip van de veelheid der waardeverbindingen, die door de gegeven functie bepaald wordt.

Hierbij verdient het mijns inziens aanbeveling, niet dadelijk over te gaan tot de invoering van de tweede as. Bij het gebruik van het assenkruis verschijnen nl. de onafhankelijk veranderlijke en de functie als gelijkwaardige begrippen; krachtens hun ontstaan zijn ze dit echter voor de leerlingen niet. Het schijnt mij dan ook niet juist, de eerste behandeling van de grafische voorstellingen in te leiden met de plaatsbepaling in het vlak. De Y-as dringt zich na eenigen tijd van zelf op als hulpmiddel om het in teekening brengen van de loodlijnen op de X-as op juiste grootte te vergemakkelijken.

Na de moeilijkheden besproken te hebben, die in het functiebegrip en de grafische voorstellingen gelegen zijn, en aangetoond te hebben, dat het algebra-onderwijs, zooals het gegeven werd en veelal nog gegeven wordt, niet in staat is de overwinning van die moeilijkheden te bevorderen, heb ik tevens reeds aangeduid, hoe men te werk kan gaan ten einde ze meester te worden. Hierbij had ik slechts de eerste oefeningen in het oog, die later gevolgd worden door de stelselmatige beschouwing der lineaire functie, met haar grafische voorstelling, welke beschouwing aanleiding geeft tot de

bespreking en de oplossing van de vergelijkingen en de ongelijkheden van den eersten graad; nog weer later door de stelselmatige beschouwing van de kwadratische functie met haar grafische voorstelling, die dan weder aanleiding geeft o.a. tot de oplossing van de kwadratische vergelijkingen en ongelijkheden enz. De toelichting tot het examenprogramma zegt m.i. duidelijk, op welk punt we het onderwerp kunnen beëindigen: na de behandeling van de gebroken lineaire functie, die vooral van belang is met het oog op de te houden beschouwingen aangaande de beide asymptoten.

Dit eindpunt schijnt mij gelukkig gekozen. Wat dan behandeld is, is voldoende voor de behandeling van iedere rationale functie $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, waarin $f\,(x)$ en $\varphi(x)$ geheele functies zijn. Daar de leerlingen alleen vergelijkingen van den tweeden graad leeren oplossen, moeten $f$ en $\varphi$ hoogstens van den tweeden graad zijn of in factoren van den tweeden graad hoogstens ontbonden zijn, opdat zij het teeken van de functie kunnen nagaan. Wat de meetkundige beteekenis is van een nulpunt van den teller en van den noemer, is reeds bij de behandeling van de gebroken lineaire functie duidelijk geworden; ook is reeds daar het bestaan van een horizontale asymptoot in de grafische voorstelling gebleken voor het geval, dat de graad van $f$ en $\varphi$ dezelfde is.

Men heeft terecht de stelselmatige behandeling van de gebroken kwadratische functie niet willen eischen; immers zou men daardoor de leerlingen verplicht hebben tot het onderzoeken en memoriseeren van het groote aantal gevallen, dat zich daarbij kan voordoen. Ook de vraag naar de bepaling der extreme waarden behoeft geen afzonderlijke behandeling, daar zij reeds bij de geheele kwadratische functie beantwoord is: men zoekt de waarde der functie, met welke slechts één waarde van $x$ correspondeert. Een afzonderlijke behandeling van de gebroken kwadratische functie is dus niet noodig voor het aanbrengen van nieuwe begrippen, en daarom m.i. terecht niet in de toelichting genoemd. Voor oefenstof zijn die functie en die van hoogeren graad natuurlijk zeer geschikt.

Nu ik over de toelichting tot het examen-programma schrijf, moet ik een opmerking maken naar aanleiding van de critiek, die geoefend is op het eerste eindexamen-vraagstuk, dat op de grafische voorstellingen betrekking had (1931, No. 3); de critiek op de schrijfwijze gra*ph*iek in de plaats van gra*f*iek e.d. laat ik daarbij

onbesproken. De critiek had vooral betrekking op de vraag naar de raaklijn, die een gegeven richting heeft; hierdoor zou men *uit* het gebied der grafische voorstellingen *op* dat van de analytische meetkunde zijn overgegaan. Ik moet verklaren, dat ik dit bezwaar niet begrijp. Inderdaad vormt het onderwerp der grafische voorstellingen een onderdeel der analytische meetkunde, dat wij behandelen wegens de meetkundige, dus aanschouwelijke, voorstelling, die zij toelaat van een algebraische betrekking. Dat men de hulp der analytische meetkunde ook inroept om meetkundige betrekkingen met behulp der algebra te vinden, sluit hierbij vanzelf aan. Waar de grens is, tot welke men mag gaan, om nog de benaming van grafische voorstellingen te mogen gebruiken, is mij niet duidelijk. Ik vermoed, dat de steller der genoemde opgave, behalve met de, uit den aard der zaak sobere, toelichting van het examen-programma, ook te rade is gegaan met de behandeling van de grafieken in de leerboeken. Zoover ik ze ken, behandelen zij alle onder het opschrift „grafische voorstellingen" het stelsel van twee lineaire vergelijkingen, voorgesteld door twee rechte lijnen, en haar oplossing, voorgesteld door de bepaling van het snijpunt dier rechten. De reden, waarom de afbeelding van de oplossing van het stelsel $y = ax^2 + bx + c$, $y = px + q$ *niet* meer tot de toelaatbare toepassingen der stof zou behooren, maar tot een *ander* onderdeel der wiskunde, ontgaat mij geheel. Sommigen zochten de moeilijkheid niet zoozeer in het bepalen van de snijpunten van een rechte lijn en een parabool, maar in den gestelden eisch van raking. Maar dan vraag ik mijzelf af, waarom men wèl mag vragen naar de plaats van het punt, waar de raaklijn evenwijdig is met de X-as, want hierop komt toch het zoeken der extrema neer, maar niet naar de plaats van het punt, waar zij een hoek van 45° met de X-as maakt.

Ik kan daarom het uitspreken van de critiek slechts beschouwen als een zoeken naar de reden, waarom vele leerlingen het vraagstuk niet hebben kunnen oplossen; dat het buiten het gebied der toelaatbare toepassingen zou vallen, kan ik niet erkennen. Deze meening wordt bevestigd door de ervaring, aan andere scholen opgedaan (van de resultaten aan enkele heb ik mij kunnen overtuigen), waar de moeilijkheid niet onoverkomelijk bleek te zijn.

Ik zou hiermede kunnen eindigen, maar wil mijn beschouwing nog een oogenblik voortzetten om te komen tot het meeningverschil met Professor Droste, waarop ik hierboven doelde. Daartoe moet ik

een stap verder gaan en ingaan op de beginselen der infinitesimaalrekening. Hierbij stuiten we op een nieuwe moeilijkheid, veel grooter nog, dan de moeilijkheden, die, zooals ik uiteengezet heb, gelegen zijn in de begrippen functie en grafische voorstelling. Die moeilijkheid betreft het limietbegrip. Hoe groot deze moeilijkheid is, blijkt uit niets beter dan uit de beschouwing van de historische ontwikkeling van het begrip. Of zij voor onze leerlingen *te* groot is hangt m.i. (zie Jaargang III, blz. 110) geheel af van de voorbereiding der leerlingen. Indien zij inderdaad voor de leerlingen onzer school, ook bij goede voorbereiding, te groot was, dan zou ons geheele wiskunde-leerplan voor de hoogere klassen één groote fout zijn; de behandeling van oneindige reeksen, van oppervlakte en omtrek van den cirkel, van den inhoud der pyramide, van de zwaartepunten, zooals wij die toch geven, zou boven hun bevattingsvermogen gaan, en dus te veroordeelen zijn. We zouden die behandeling moeten doen dalen tot het burgeravondschool-peil, maar ons dàarbij ernstig de vraag moeten stellen, of de tijd en de inspanning, aan dat onderwijs besteed, nog wel te verantwoorden zouden zijn voor de leerlingen, die bij ons geen opleiding voor het handwerk zoeken.

Men zou hierop kunnen antwoorden, dat het begrip niet te moeilijk is, wanneer we het telkens bij één der genoemde concrete onderwerpen ter sprake brengen, maar dat het abstracte limietbegrip, zónder bevestiging aan een of ander meetkundig of mechanisch probleem, te groote moeilijkheden inhoudt. Indien dit echter het geval is, dan moet dit, zooals ik vroeger aangetoond heb (Jgg. III, blz. 110, V, blz. 276), geweten worden aan onvoldoende voorbereiding van het begrip door verwaarloozing van de onderwerpen, wier bestudeering voor bemachtiging ervan noodig zijn.

Tegen het streven naar een zekere mate van exactheid heeft men zich dikwijls gekeerd met de opmerking, dat de mate van exactheid, die wij nastreven, slechts met een bepaald punt in de ontwikkeling van het wiskundige denken correspondeert; het zou onjuist zijn, jeugdige leerlingen te willen opvoeren tot de hoogte, tot welke het denken eerst na een tijdsverloop van eeuwen geklommen is. Ook Professor Droste maakte deze opmerking; tegen haar gaat mijn bezwaar. Ik geloof, dat aan haar de onjuiste gedachte ten grondslag ligt, dat een begrip des te meer moeilijkheid inhoudt, naar gelang het een verder gelegen punt op den ontwikkelingsweg beteekent. Deze gedachte is zeker onjuist voor zoover zij algemeen

is. De beginselen der infinitesimaalrekening zouden niet aan de leerlingen kunnen worden aangeboden in den vorm, waarin zij door Newton en Leibniz in hun werken werden onderwezen. Het beroep, dat de grondleggers deden op de intuitie, was zoo ernstig, dat slechts een klein aantal van de geleerden van hun tijd tot de overwinning der moeilijkheden in staat bleek, en dat zelfs vele groote denkers van de juistheid van hun beschouwingen niet waren te overtuigen. Wat nu de latere onderzoekingen ten gevolge gehad hebben, is *niet*, dat de toegangsweg tot de begrippen der infinitesimaalrekening door nieuw opgeworpen denkbeelden bemoeilijkt is op zoodanige wijze, dat alleen de vakgeleerden hem kunnen volgen; zij hebben een weg gebaand, waar die niet was, en op deze wijze de nadering tot die begrippen, eertijds toegankelijk alleen voor de groote geesten, zelfs voor kinderen mogelijk gemaakt.

Ik meen, dat men zich wel eens aan een dwaling schuldig maakt, als men, door méér aan de intuitie over te laten, de zaken denkt te vereenvoudigen; men zal dit doel op deze wijze volstrekt niet altijd bereiken. De moeilijkheden, die overwonnen moeten worden, behooren niet tot de voorstelling, die wij van de begrippen geven; zij behooren tot de begrippen zelf.

De vraag, of deze moeilijkheden te groot zijn, is er een van het grootste belang. Veel minder belangrijk is de vraag, hoe wij voor de behandeling van nieuwe onderwerpen tijd zullen vinden; er is in de traditioneele schoolwiskunde heel wat, dat vervallen kan of vereenvoudigd kan worden. Een studie-commissie als die, waarom Mogendorff in de reeds enkele malen genoemde bijeenkomst vroeg, heeft reeds jaren geleden ook deze vraag gesteld en beantwoord; ik moge hiervoor naar Jaargang I verwijzen.

---

# EEN DROOM. [1])

Ik had een zware schooldag achter de rug, hetgeen overigens niets bijzonders is, en was nu 's avonds bezig mij door een massa huiswerk voor de volgende dag heen te slaan. Maar toen het zoo tegen tienen liep kwam er, terwijl ik zat gebogen over mijn algebraboek, zoo'n vreemd gevoel over mij, zoo'n trek om voor een oogenblikje m'n oogen eens dicht te doen. Nu, daar kon geen kwaad in steken dacht ik, en sloot mijn oogen even. Ik hoorde het tikken van de klok, het suizen van het theewater, de sommen warrelden door mijn hoofd,...... A en B liepen elkaar tegemoet...... met een snelheid a en b...... en nu wisten ze niet, waar ze elkaar moesten ontmoeten...... en nu moest ik dat voor hen uitrekenen.

Ik lei mijn hoofd eens even op mijn arm op de tafel om te denken......

Ik liep op een breede zonnige weg, die zich onafzienbaar ver door 't landschap uitstrekte. Reeds leek 't mij uren geleden, dat ik de laatste sterveling ontmoet had, toen ik plots op een kilometerpaaltje een oud man ontwaarde. Hij zag er moe en treurig uit en wischte zich met een groote zakdoek het zweet van het voorhoofd.

Toen ik hem bereikt had groette ik beleefd en vroeg of hij ook wist hoe laat het was.

De oude zag verwonderd naar mij op, glimlachte toen even en zei:

„Verminder ik het aantal minuten, dat de groote wijzer aanwijst met 10, dan krijg ik het uur dat de kleine wijzer wijst.

Tel ik echter 4 maal dat aantal minuten en 3 maal het uurcijfer bij elkaar op dan verkrijg ik het product van de twee gevraagde getallen".

[1]) Overdruk van een stukje in no. 2 Jg. IX 1926 van het „Amsterdamsch Lyceisten Orgaan, geschreven door den Heer Ammers. De onderdirecteur Dr. Kettner stuurde het mij en gaf verlof om het over te nemen in Euclides. W.

Het was nu mijn beurt om den oude stomverwonderd aan te kijken en ik maakte daar dan ook ijverig gebruik van.

„Wat, wat zegt u" stamelde ik eindelijk „wat bedoelt u?".

„Aha" sprak de oude man, „u bent een vreemde merk ik, ik spreek toch anders duidelijk genoeg".

„Ik begrijp u niet. Waar ben ik dan; wie bent u?" vroeg ik verward.

„Kent u mij niet" hij scheen verwonderd „wel ik ben A".

„A?".

„Zeker, A uit alle algebra boeken".

„Aangenaam kennis met u te maken" zei ik en stak hem een hand toe.

„Ach zegt u dat maar niet" antwoordde hij mismoedig „ik weet heel goed hoe u allemaal over mij denkt. En toch ik kan het heusch niet helpen" hij steunde het hoofd treurig in de hand. „Het is een hard lot" ging hij verder „om de 20 kilometer lange weg van P naar Q af te leggen met slechts één keer rusten en als je dan in Q aankomt, daar B aan de ingang van de stad te vinden die je hoonend uitlacht, omdat je weer een kwartier later dan hij bent aangekomen. En dan zeggen de menschen nog, als ik hun vertel dat ik toch het eerste stuk met een snelheid x en het tweede met een snelheid y heb afgelegd, dat, als ik het éérste met de snelheid y en het tweede met de snelheid x had afgelegd, ik 10 minuten vóór B zou zijn aangekomen.

„Als nu gegeven is dat B de geheele weg met een gemiddelde snelheid van 5 K.M. per uur aflegt en A 10 minuten heeft gerust 2 K.M. voorbij het midden van de weg, vraagt men naar de snelheid van A voor en na het rustpunt" voegde ik er triomphantelijk aan toe. Ik herinnerde mij opeens de som uit het algebra boek.

Maar hij scheen mijn woorden niet te hooren. „En nu laatst" ging hij weer voort „ging ik van R naar S. Een half uur later vertrok B uit R. Ik kwam in S aan en wachtte. En na een half uur was B er nog niet. Ik kon wel dansen van pleizier. Na een uur kwam er een auto aan, en daar stapte hij uit. Hij was gevallen onderweg, en kon nu moeilijk loopen.

„Ha" dacht ik „nu zal ik tenminste niet altijd meer de laatste zijn die aankomt".

Twee dagen later vertrek ik uit C naar D. Na drie kwartier rijdt me de diligence achterop, en wie hangt er uit het raampje, B!

En toen hij me zag, lachte hij me uit en trok nog een lange neus tegen me ook.

Hij was een half uur later weggegaan dan ik en toen ik in D kwam, was hij er al een uur. Ik heb ook altijd pech!" voegde hij er met een zucht aan toe.

Toen stond hij langzaam op. „Ik moet nu verder, want B wacht in R op mij en als ik dan zoo laat kom, heeft hij weer een groote mond tegen mij. Tot ziens dus en goede reis". We reikten elkaar de hand en vervolgden onze weg.

Nadat ik weer omstreeks een half uur gewandeld had, hoorde ik in de verte achter mij het geratel van een rijtuig. Ik keek om en zag in een dikke stofwolk een diligence naderen. Ik bedacht mij niet lang, de wandeling langs de eindelooze eenzame weg had mij doodmoe gemaakt en nog steeds zag ik in de verte geen stad of dorp verschijnen.

Ik zwaaide dus met mijn armen om den koetsier te waarschuwen en het volgend oogenblik stond de koets stil. Ik steeg in. Binnen vond ik een groot gezelschap in druk gesprek. In het midden zat een nog tamelijk jeugdige man, die voortdurend het hoogste woord voerde en iedereen scheen met aandacht en bewondering naar hem te luisteren. Bij mijn binnenkomen had hij even gezwegen, nu ging hij weer verder: „Nu we gingen op weg, en je begrijpt, hij was direct stukken achter, en toen ik in L aankwam, was hij er nog drie en een halve kilometer van verwijderd. En onlangs zijn we met z'n drieën van S naar T geloopen, met C erbij, maar ik was ze stukken voor hoor. Ja, kilometers.

Ach, die lui zijn in alles zoo langzaam. Met werk ook. Laatst moesten we met z'n drieën een werk afmaken. Maar als ze mij 3 dagen hielpen, kon ik de rest in 3 dagen voltooien. Hielpen C en ik, A echter 4 dagen, dan kon hij het werk daarna in 4 dagen afmaken en als A en ik, C 5 dagen hielpen, kon ie het werk in 2 dagen afmaken. Nu, dat zegt genoeg nietwaar.

„Tjonge, sjonge" knikten de toehoorders vol bewondering.

Ik begreep nu echter, dat de man in het midden niemand minder dan B moest zijn, B, de onoverwinnelijke, ongeevenaarde snelwandelaar en tevens handige koeiensjacheraar. Ik nam hem eens op, terwijl hij verder ging: „Ik moet overigens zeggen, dat reizen met de diligence bevalt me anders ook best maar wil ik jullie eens wat vertellen. Er is iets wat nog vlugger gaat".

„Het is niet waar" riepen de toehoorders in koor.

„Ja, en toch is het zoo. 't Was een gemeene streek. Laatst ging ik met C en D naar P. Ik stapte lekker op de diligence en ik dacht, ik ben fijn toch veel eerder aan. Maar toen ik in P aankwam, was D er allang. Wat had de gemeenert gedaan? Hij was met de spoor gegaan! Nu vraag ik je. Zoo was hij er het eerst, want die stomme C kwam met de trekschuit."

„Gosj!" bewonderden de reisgenooten.

„Da's de eenige keer geweest dat iemand eerder dan ik ergens is aangekomen, maar ik denk er over om voortaan óók maar met de spoor te gaan" vervolgde B weer.

Een tijdje bleef het nu stil. Plots bemerkte ik echter, dat we reeds door de buitenstraten van een stad reden. Ik zag huizen, winkels, groote uithangborden van wijnhandelaren, laken-verkoopers en kruideniers en, hier en daar op de hoeken, van verzekerings- en hypotheekbanken.

Na een paar minuten stopte de diligence. B en de rest stapten met veel drukte en herrie uit, welk voorbeeld ik dan ook maar, echtèr zonder drukte, volgde. Ik stond op een groot plein, waar in het midden blijkbaar markt was, terwijl overal langs de rand jongetjes zaten te knikkeren, hetgeen hier en daar met hooggaande ruzie gepaard ging, waarbij ze zich niet ontzagen, elkaar uit te schelden voor de tafel van dertien, hetgeen voor hen zeker het meest ellendige ding der wereld was.

Ik bleek op het wortelplein te zijn aangeland.

Ik wandelde nu het terrein der markt zelf eens op. Overal stonden schreeuwende lakenhandelaren en wijnzwendelaars, andere gebruiksartikelen schenen de bewoners van deze wonderlijke stad niet te kennen.

Plots merkte ik echter een vreemde man temidden van de menschenmassa op. Hij stond met een notitieboekje in zijn hand bij een kraampje en scheen den eigenaar te interviewen. Ik naderde hem om hem van wat dichterbij te bespieden. Uit de zak van zijn jas staken een logarithmentafel en...... Wijdenes en de Lange II. Het kon niemand anders dan de heer Wijdenes in eigen persoon zijn, die hier stof voor zijn algebraische problemen kwam halen. Juist wilde ik hem met eerbiedige bewondering groeten, toen hij met een ruk zich naar mij omdraaide en me beval: „Reken uit". Op het zelfde moment zag ik een papiertje onder mijn neus geduwd, met

de tragische geschiedenis van een lakenhandelaar, die z'n laken met ik weet niet hoeveel percent verlies had verkocht, want dat moest ik juist uitrekenen. De schrik sloeg mij om 't hart ik wilde wat zeggen......

Ik zat voor mijn algebraboek en mijn schrift. Het was pas twee minuten over tien, waarmee weer een onomstootelijk bewijs is gegeven voor de bewering, dat onze droomen slechts een oogenblikje in werkelijkheid duren.

Aan de zuivere waarheid van dit verhaal, behoeft men namelijk geen oogenblik te twijfelen. SREMMA.

---

## INGEKOMEN BOEKEN.

Van de firma P. NOORDHOFF, Groningen.

Dr. U. H. VAN WIJK, *Meervoudig verwante vlakke figuren;* academisch proefschrift.

P. WIJDENES en Dr. H. J. E. BETH, *Nieuwe School-algebra* II, **5de druk,** geb. . . . . . . . . . . . . . . . . f 2.25

P. WIJDENES en Dr. H. J. E. BETH, *Nieuwe School-algebra* III, **4de druk,** geb. . . . . . . . . . . . . . . . . f 2.25

P. WIJDENES, *Beknopte Algebra* I, **6de druk,** gec. . . . . f 1.70

Uitgave van de firma WOLTERS, Groningen.

Dr. A. D. NATHANS, *Leerarenopleiding.* (Overdruk uit: „Paedagogische *Studiën*").

---

# HISTORISCHE REVUE

DOOR

E. J. DIJKSTERHUIS.

---

*Fernando de Almeida e Vasconcellos. História das Matemáticas na Antiguidade.* Paris—Lisboa. Livrarias Aillaud e Bertrand. Geen jaartal. XXIV en 653 blz.

De zeer omvangrijke geschiedenis van de wiskunde in de oudheid, die de Portugeesche hoogleeraar de Vasconcellos in het licht heeft gegeven (wel een sprekend bewijs, hoe ook ginds de belangstelling in de historie van hun vak onder de mathematici groeiende is), bevat, dank zij de heldere en boeiende schrijfwijze en de practische indeeling van de stof, een aangenaam leesbaar en, voorzoover ik heb nagegaan, betrouwbaar overzicht over de ontwikkeling van de mathesis van de oudste tijden, waaruit berichten ter beschikking staan, af tot aan den tijd, waarin de Indische en Arabische wiskunden hun invloed in West-Europa beginnen uit te oefenen.

Na een voorrede en een inleiding valt het werk uiteen in vier deelen, waarvan het eerste de beoefening der wiskunde in de oude oostersche culturen, voornamelijk dus bij de Aegyptenaren en de Babyloniers, behandelt. Dit gedeelte is echter reeds niet meer op de hoogte van den tijd, daar de schrijver blijkbaar de literatuur, die in de laatste jaren op dit gebied verschenen is, niet meer heeft kunnen raadplegen. De behandeling beperkt zich niet tot de zuivere wiskunde; zoo is een deel van een hoofdstuk gewijd aan de Hebreeuwsche Kosmographie volgens het Oude Testament.

Hierna komt in het omvangrijke tweede deel (dat veel grooter is dan de drie andere samen) de Grieksche wiskunde vanaf Thales tot aan het einde van de tweede Alexandrijnsche School en de verplaatsing van de beoefening van de wiskunde naar Byzantium ter sprake. Ook hierbij wordt aandacht gewijd aan verwante onderwerpen, met name astronomie en mechanica.

Een zeer kort derde deel (slechts 14 blz.) bespreekt de mathe-

matische kennis, die van Indischen oorsprong is, terwijl ten slotte het vierde de Arabische en Moorsche wiskunden behandelt en de ontwikkeling van het vak in Europa vanaf den val van het Romeinsche keizerrijk tot in de 13e eeuw vervolgt.

De plaatsruimte verbiedt, op details van de behandeling in te gaan. De hoofdindruk van het werk kan echter niet anders dan tot waardeering stemmen. Men zou andere gebieden van de historie ook op deze wijze behandeld willen zien.

*George Sarton. Introduction to the History of Science. Vol. II. From Rabbi ben Ezra to Roger Bacon. In Two Parts.* XIII en 1251 blz. Baltimore. The Williams and Wilkins Company. 1931 $ 12.00.

Het nieuw verschenen deel van Sarton's groote *Introduction to the History of Science* vormt het tweede van de in acht of negen deelen ontworpen eerste reeks van te publiceeren werken, waarin telkens een chronologisch overzicht van de wetenschappelijke ontwikkeling van een bepaald tijdvak wordt gegeven. Deel I, in 1927 verschenen, ging van Homerus tot Omar Khayan; Deel II behandelt de periode van Rabbi ben Ezra tot Roger Bacon, d.w.z. van c. 1100 tot c. 1300. Na de eerste reeks zal een tweede verschijnen, waarin telkens een bepaald cultuurtype (b.v. Joodsch, Mohammedaansch, Chineesch) zal worden geschilderd, terwijl ten slotte nog een derde reeks van negen deelen is ontworpen, die ieder een overzicht van de historische ontwikkeling van een bepaalde wetenschap zullen geven.

Wat deze bovenmenschelijke onderneming tot dusver heeft opgeleverd, kan niet anders dan sterk verlangen naar haar voortzetting en voltooiing wekken; na zeer lezenswaarde algemeene inleidingen vindt men telkens van leven en werken van iederen behandelden schrijver een zeer bondig gestelde samenvatting, gevolgd door zeer uitvoerige literatuuropgaven. Men kan zich daardoor geen betere gelegenheid tot orienteering over een bepaald tijdvak of over een bepaalden schrijver wenschen. Het begrip Science wordt daarbij zoo ruim mogelijk opgevat; de volgende opsomming van den inhoud van een der Boeken, waarvan Vol. II er vier bevat, kan er een indruk van geven: Survey of Science and Intellectual Progress. Religous Background. The translators. Education. Philosophic and Cultural Background. Mathematics and Astronomy. Physics and Music.

Chemistry. Geography. Natural History. Medicine. Historiography. Law and Sociology. Philology.

Uit den aard der zaak moet deze aankondiging zich tot algemeenheden bepalen. Bij een zoo overweldigende hoeveelheid materiaal zou ingaan op een enkel detail niet veel meer dan dwaasheid zijn.

*Christian Huygens. L'Horloge à pendule de 1656 à 1666 rédigé par J. A. Vollgraff. Extrait des Oeuvres Complètes de Christiaan Huygens, Tome XVII.* Niet in den handel.

Als voorbereiding op het in bewerking verkeerende zeventiende deel van de groote Huygens-uitgave van de Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen publiceert de redacteur Dr. J. A. Vollgraff hier de stukken, die betrekking hebben op de ontwikkeling van Huygens' slingeruurwerk in de tien jaren vóór het vertrek naar Parijs. Hiertoe behooren twee complete werken: het *Horologium* van 1658 en het *Kort Onderwijs aengaende het gebruyck der Horologien tot het vinden der Lenghten van Oost en West,* welk laatste stuk hier voor het eerst in den oorspronkelijken Hollandschen tekst wordt gepubliceerd; verder tal van fragmenten als ontwerp of aanvulling.

De uitgave is, zooals dat bij dit werk gewoonte is, weer met de uiterste nauwgezetheid en volledigheid tot stand gebracht. De bewerker voldoet geheel aan de hooge en veelzijdige eischen, die zijn eervolle taak hem stelt: naast zijn historische en mathematische gaven kan men ditmaal de wijze bewonderen, waarop hij zich in de techniek van het slingeruurwerk heeft ingewerkt.

*Sir Isaac Newton. Opticks or a treatise of the reflections, inflections and Colours of Light. Reprinted from the fourth edition.* London. Bell and Sons 1931. XXVIII en 414 blz. 6sh.

Door Einstein aangekondigd en door Whittaker ingeleid, verschijnt hier het beroemde boek van Newton in een mooi uitgevoerde practische editie, die ongetwijfeld zal kunnen bijdragen tot bevrediging van de verhoogde belangstelling, die juist het optische werk van den grooten Engelschman in onzen tijd geniet. Een belangstelling, die het ten volle verdient! Want niet alleen vindt men hier, in al de bekoring van de oorspronkelijkheid, de klassieke proeven over dispersie beschreven, die een vast bestanddeel van de schoolphysica zijn geworden, maar bovendien moet het iedereen aan-

lokken, hier eens in Newton's eigen woorden de befaamde corpusculairtheorie van het licht (voor 30 jaar nog als een soort van vlek op zijn naam beschouwd en daarna wegens een analogie met de quantentheoretische opvatting plotseling sterk in aanzien gestegen) te lezen en kennis te nemen van de merkwaardige vermenging van corpusculaire en undulaire beschouwingen, die men vroeger voor een kunstmatig redmiddel van een ontoereikende theorie heeft gehouden, maar waarin de tegenwoordige physicus een typeerend voorbeeld van geniale intuitie herkent.

*Johann Kepler 1571—1630. A Tercentenary Commemoration of His Life and Work. Prepared under the auspices of The History of Science Society.* The Williams & Wilkins Company. Baltimore. 1931. IX en 133 blz. $ 2.50.

Dit typographisch keurig verzorgde (maar dan ook tamelijk dure) werkje bevat de voordrachten, die op de Kepler-herdenking van 31 December 1930 te Cleveland gehouden zijn door W. C. Rufus, D. J. Struik en E. H. Johnson, voorafgegaan door een inleiding van A. S. Eddington en gevolgd door een bibliographie van Kepler's werken door F. E. Brasch.

Rufus behandelt Kepler als astronoom en geeft tevens een korte biographie, Struik spreekt over zijn werk als wiskundige, Johnson over den sterk mystieken inslag van zijn wezen. De bijdrage van onzen landgenoot, helder, bondig en goed gedocumenteerd, vormt (met de bibliographie) wel het belangrijkste deel van de verzameling. Alleen wordt het verband tusschen de economische, politieke en religieuse structuur van een tijdvak (een tegenwoordig zeer in zwang zijnde theorie) wel wat erg apodictisch als een feit vooropgesteld, terwijl men het toch meer als een programma voor toekomstig historisch werk dan als een resultaat van vroegere onderzoekingen zal moeten beschouwen.

Het minst kon mij de voorrede van Eddington bekoren, die meer geschreven lijkt ter wille van een pakkend slot (the music of the spheres — dank zij Kepler — no longer drowned by the roar of machinery) dan uit liefde voor de historische exactheid. De kinematische astronomie van de Grieken (uitwerking van Plato's opgave *σῴζειν τὰ φαινόμενα*) verschilt toch alleen hierin van de kinematische astronomie van Kepler, dat zij, wegens de onaardsche eigenschappen van den aether, aan de eenparige cirkelbewegingen

vasthoudt, die Kepler verwerpt. Natuurlijk beteekent dat een belangrijke stap vooruit. Maar of men daarom mag zeggen, dat de epicykeltheorie door roar of machinery werd begeleid en die van Kepler door de harmonie der spheren (een conceptie, die toch uit de Grieksche astronomie afkomstig is)? Het lijkt me boud.

*Jos. E. Hofman. Erklärungsversuche für Archimeds Berechnung von* $\sqrt{3}$. Archiv für Geschichte d. Math., d. Naturw. und d. Technik. XII (1930) 386—403.

*F. Bosch, Ueber die quadratischen Irrationalitäten in der griechischen Mathematik.* Jahresbericht der D.M.V. 41 (1931) 59—72.

*Kurt Vogel, Die Näherungswerte des Archimedes für* $\sqrt{3}$. Jahresbericht der D.M.V. 41 (1932) 152—158.

In deze drie artikelen wordt nogmaals de reeds herhaaldelijk behandelde vraag aan de orde gesteld, hoe Archimedes toch gekomen kan zijn aan de rationale benaderingen voor $\sqrt{3}$ $\left(\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}\right)$ die hij de κύκλου μέτρησις zonder bewijs meedeelt. Hofmann ontwikkelt in aansluiting aan Commandino een interessante geometrische methode, die het voordeel heeft, dat ze de beide te verklaren waarden als opvolgende termen van een reeks benaderingen (afwisselend te klein en te groot) oplevert, die bovendien vergezeld gaat van een naar Griekschen trant ingekleed exact convergentiebewijs en die zoo voortreffelijk in den stijl der Grieksche wiskunde past, dat ze, vertaald, in den commentaar van Eutokios nauwelijks als latere reconstructie zou opvallen. Bosch generaliseert het probleem, door inplaats van $\sqrt{3}$ $\sqrt{D}$ te nemen (D geheel positief, niet quadratisch) en nu oplossingen te zoeken van de vergelijking van Pell $x^2 - Dy^2 = C$ analoog aan de Euclidische oplossing van de Pythagoraeische vergelijking $x^2 + y^2 = z^2$. Dit is alles algebraisch correct; echter zou de inpassing in een Griekschen commentaar hier wel heel wat meer moeite kosten dan bij Hofmann, wat de historische waarde der methode verzwakt. De schrijver toont ten slotte aan, dat de behandelde methode een middel kan opleveren, om het begrip van het irrationale getal op een voor scholen geschikte wijze exact in te voeren. Ten slotte vestigt Vogel er de aandacht op, dat in de *Metrika* van Heroon een klassieke benaderingsmethode van irrationale vierkantswortels beschreven staat, waaraan uit den aard der zaak grootere histori-

sche authenticiteit toekomt dan aan eenige reconstructie, hoe vernuftig ook. Heroon zelf gebruikt de methode slechts weinig, maar de Byzantijnen Rhabdas en Barlaam behandelen haar uitvoerig. De waarde $\frac{1351}{780}$ vindt men er direct mee. Vogel toont aan, hoe men door een analogen gedachtengang ook ongedwongen tot de bovenvermelde onderste grens komt.

*A. Fraenkel. Georg Cantor.* Sonderabdruck aus dem Jahresbericht der D. M. V. Leipzig (Teubner) 1930. 78 blz.

De schrijver van het bekende werk over de leer der verzamelingen geeft hier een schildering van het leven, de persoonlijkheid en de werken van den schepper van deze, voor de moderne wiskunde onmisbare en toch voor een halve eeuw nog niet dan met spot of wantrouwen beschouwde gedachtenwereld. De boeiende, door talrijke citaten uit brieven en artikelen verlevendigde uiteenzetting wekt een helder beeld van een belangrijk leven, welks invloed op de ontwikkeling van het menschelijk denken tot ver buiten de kringen der wiskundigen aandacht verdient en dat in de tragiek van de miskenning door toonaangevende tijdgenooten (vooral Kronecker) ieders sympathie zal verwerven.

*Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik. Abteilung B. Studien. Band I, Heft 4.* 1931. Berlin. Julius Springer. R.M. 24.80.

Dit Heft bevat de volgende bijdragen:

*O. Neugebauer, Die Geometrie der ägyptischen Mathematischen Texte.* Overzichtelijke verzameling van alle bronnen voor onze kennis van de prae-Helleensche Aegyptische meetkunde. Er wordt nadruk op gelegd, dat na de nieuwe interpretatie, die Peet van een plaats in den Moskouschen papyrus gegeven heeft, die plaats niet langer kan worden opgevat als bewijs, dat de Aegyptenaren de oppervlakte van een bol hebben kunnen berekenen.

*O. Neugebauer, Sexagesimalsystem und babylonische Bruchrechnung II.* Voortzetting van een vroegere mededeeling (QS, B I, 183—193) Interpretatie van babylonische vermenigvuldigingstabellen als hulpmiddelen voor de bepaling van het sexagesimale aequivalent van een echte breuk. De tabel met grondtal 7 voltooit het systeem der tabellen echter tot een groep echte vermenigvuldigingstabellen.

*O. Neugebauer, Sexagesimalsystem und babylonische Bruchrechnung III.* Nadere behandeling van den deelingsalgorithmus. De schrijver komt tot de conclusie, dat de Babyloniers de voordeelen van het positioneele sexagesimaalsysteem ten volle hebben weten te gebruiken.

*O. Becker, Die Diäretische Erzeugung der platonischen Idealzahlen.* In dit artikel wordt de door Stenzel opgestelde diairetische theorie der Platonische idtaalgetallen verder ontwikkeld, om op die wijze nader te komen tot de oplossing van het probleem van hun beteekenis en hun voortbrengingswijze. Hierna worden de relaties, waarin de ideaalgetallen tot de Grieksche wiskunde kunnen hebben gestaan, onderzocht.

*E. Bessel-Hagen und O. Spiess, Das Buch über die Ausmessung der Kreisringe des Ahmad ibn Omar al Karabisi.* Reproductie van den Arabischen tekst met vertaling en commentaar van een werk van den mathematicus Karābīsī (vóór het einde van de 10e eeuw). De schrijver behandelt niet alleen de eigenlijke cirkelringen, maar ook den torus en het lichaam, dat ontstaat, wanneer een vierkant wentelt om een in zijn vlak gelegen as, die aan een der zijden evenwijdig is en geen zijde van het vierkant ontmoet. Het eerste, planimetrische, deel is streng Euclidisch; in het stereometrische, waar de nauwe aansluiting aan de *Elementen* niet meer mogelijk is, blijkt het peil van exactheid veel lager te zijn.

Met dit Heft is Band I van de afdeeling B van de *Quellen und Studien* compleet. Het heeft tal van belangrijke bijdragen tot de geschiedenis der wiskunde gebracht. Wanneer de uitgever echter werkelijk een algemeene verspreiding beoogt, zou prijsverlaging zeer wenschelijk zijn. De kosten van dit eerste deel blijken namelijk totaal R.M. 83.60 te bedragen!

*Martin Gebhardt, Goethe als Physiker. Ein Weg zum unbekannten Goethe.* G. Grote'sche Verlagsbuchhandlung. Berlin 1932. VIII en 163 blz. 7 platen en 16 fig. R.M. 5.80.

Wie in het jubileumjaar 1932, waarin Goethe in het middelpunt van zoo veler belangstelling staat, een objectief kritische en toch door persoonlijke vereering en bewondering gedragen en verwarmde uiteenzetting van zijn werk als physicus lezen wil, kan niet beter doen, dan het boven aangekondigde werkje ter hand te nemen, dat

in zijn duidelijke en prettig leesbare schrijftrant de lectuur van de *Farbenlehre* kan vervangen voor wie zich slechts in groote lijnen orienteeren wil en haar kan vergemakkelijken voor wie dieper wil doordringen in de merkwaardige wijze, waarop een groot dichter de natuur onderzocht. Het grootste deel van het boek is uit den aard der zaak aan de optica gewijd, het gebied, waartoe Goethe zich in verband met zijn belangstelling in de schilderkunst sterk aangetrokken voelde en dat hem, den zoo sterk visueel ontwikkelden mensch, levenslang is blijven boeien. De schrijver geeft eerst een overzicht van den inhoud van de *Farbenlehre* en behandelt dan tamelijk uitvoerig Goethe's polemiek tegen Newton, die heftige, door en door onbillijke, op volkomen misverstand berustende uitbarsting van antipathie tegen een zuiver wetenschappelijke theorie, die alleen het ongeluk had, niet in vooropgezette beschouwingswijzen der natuur te passen. De gecritiseerde deelen van Newton's *Opticks* worden daarbij aan de hand van de oorspronkelijke figuren uitvoerig weergegeven, waardoor het den schrijver mogelijk wordt, volkomen duidelijk te maken, op welke punten Goethe zijn aanvallen richtte en wat hij er voor bezwaren tegen had. Ook zijn eigen opvattingen over kleuren (het ontstaan van rood bij beschouwing van licht door een troebel medium, van blauw bij het kijken tegen een donkeren achtergrond door een troebel medium, waarop licht valt enz.) worden, voorzoover dat mogelijk is, tot het begrip van den lezer gebracht. Belangrijk is ook de verheldering van de twee, voor Goethe's natuurbeschouwing zoo fundamenteele begrippen Aperçu en Urphaenomen, waarbij ik alleen zou willen opmerken, dat de schrijver mij wat te kritisch lijkt ten opzichte van het bestaansrecht dezer begrippen in abstracto, dus losgemaakt van de, inderdaad ongelukkige, toepassing, die zij op het gebied der kleurentheorie hebben ondervonden.

Na de noodzakelijke afrekening met de physische dwaalwegen der *Farbenlehre* — altijd een pijnlijke plicht voor een Goethebewonderaar — gaat de schrijver met genoegen over tot het gebied, waarop Goethe werkelijk belangrijk en baanbrekend werk heeft verricht, de physiologische optica. De reproductie van de oorspronkelijke platen en de vele citaten (het is een genot op zich zelf, natuurverschijnselen te hooren beschrijven in de woordenpracht en het statige rythme van Goethe's proza) maken ook hier het betoog even duidelijk als aangenaam te volgen. Uit de optica komen daarna

nog de verschijnselen van phosphorescentie en polarisatie ter sprake; daarop volgt een hoofdstuk over Goethe als meteoroloog, waaraan een kleine bloemlezing is toegevoegd van gedichten, waarin zijn groote vertrouwdheid met en zijn opmerkingsgave voor natuurverschijnselen blijkt; vervolgens een korte behandeling van verschillende andere gebieden der physica, waarop hij werkzaam is geweest of die zijn belangstelling hadden. Een samenvatting toont, hoezeer hij in zijn natuurwetenschappelijk werd altijd voor alles dichter gebleven is.

Het fraai uitgevoerde en voor matigen prijs verkrijgbare boek kan dus warm worden aanbevolen; het is in zijn bezielde helderheid een gelukkig voorbeeld van de gunstige uitwerking, die een leven van werkzaamheid bij het onderwijs op iemand's betoogtrant hebben kan, wanneer hij erin slaagt, het enthousiasme, dat hem oorspronkelijk vervulde, door de jaren heen ongerept te bewaren.

G. Tierie, *Cornelis Drebbel* (1572—1633). Amsterdam. H. J. Paris, 1932. Engelsch. 124 blz. Dissertatie Leiden.

Cornelis Drebbel heeft niet te klagen over gemis aan belangstelling van de zijde zijner hedendaagsche landgenooten. In 1904 heeft H. A. Naber hem op een zeer hoog voetstuk geplaatst, waarvan hij in 1922 door F. M. Jaeger in een goed gedocumenteerd betoog weer af is gehaald. Nu, tien jaar later, komt de schrijver van het boven vermelde proefschrift de discussie weer hervatten; nogmaals worden ons over het leven van Drebbel, over zijn verblijf aan de hoven van Jacobus I en Rudolf II, over zijn familie, zijn perpetuum mobile, zijn duikboot en zijn zuurstof, mededeelingen gedaan, welker uitvoerigheid door de historische beteekenis van de persoonlijkheid, waarop zij betrekking hebben, niet steeds gemotiveerd kan worden geacht; en thans slaat de balans der waardeering, bij wijze van reactie op de critische nuchterheid van den Groningschen hoogleeraar, weer duidelijk naar de meer enthousiaste stemming van den Hoornschen ontdekker van de ster van 1572 over.

Voor een dergelijke heropening van een door velen reeds als gesloten beschouwde discussie kunnen natuurlijk tweeërlei geldige redenen bestaan: òf de schrijver heeft nieuwe gegevens aan te voeren,

die aan zijn voorgangers onbekend waren òf hij voelt zich in staat om op grond van de beschikbare gegevens de redeneeringen, die hem bij die voorgangers mishagen, omver te werpen en daardoor tot een nieuwe voorstelling van den gang van zaken te komen. Voorzoover ik nu zien kan, is bij het werk van Tierie noch het een, noch het ander het geval; nieuwe feiten van eenig belang heb ik er niet in kunnen vinden en hoewel de conclusies duidelijk afwijken van de door Jaeger in 1922 getrokkene, is van critiek op diens redeneeringen geen sprake.

Dit overwegende, moet men zich echter wel afvragen, welk recht van bestaan dit (keurig gedrukte) werkje eigenlijk heeft. Wat hebben we er aan, om nog eens de beschrijving van het z.g. perpetuum mobile (een thermoscoop, zooals Heroon ze reeds construeerde) te lezen, gegeven met behulp van dezelfde citaten, die ook al bij Jaeger staan en zonder zelfs een poging tot discussie van de historische waarde der constructie. Berichten van 17e-eeuwsche schrijvers over de duikbootpraestatites en over de zuurstof geeft Jaeger ook genoeg, maar hij betoogt er bij, dat de duikboot een onding was en dat er van isoleering van zuurstof geen sprake kan zijn geweest. Tierie (en dat is zijn goed recht) gelooft al die verhalen wel, maar wat baten ons de betuigingen zijner goedgeloovigheid, wanneer hij niet de argumenten, die Jaeger voor zijn skepsis heeft, weerlegt? Het is waar, dat hij over één ervaring beschikt, die Jaeger moest missen; H. A. Naber heeft hem in 1931 te Hoorn de duikboot van Drebbel gedemonstreerd; dat doet de deur dicht; alleen vraagt de kritische lezer al spoedig, of het een modelletje in een bekerglas was, dat hij aanschouwd heeft of dat hij werkelijk Naber in de golven van de Zuiderzee heeft zien neerdalen?

In het algemeen krijgt men den indruk, dat de schrijver wel de voor de beoefening van de wetenschapsgeschiedenis onmisbare belangstelling in het verleden van onze hedendaagsche begrippen, methoden en instrumenten bezit, maar dat hij den nog veel meer onmisbaren kritschen zin en het vermogen, om wezenlijke dingen van onwezenlijke te onderscheiden, ontbeert, zonder welke de geschiedenis der wis- en natuurkunde nooit meer kan worden dan een verzameling van historische aardigheden. De wijze, waarop hij aantoont, dat Adriaen Metius in 1608 de manen van Iupiter heeft ontdekt en de opmerking over de merkwaardigheid, dat Descartes, Drebbel en Leeghwater alle drie aanwezig waren bij het beleg van La Rochelle, spreken in dit opzicht boekdeelen.

H. Gerstinger und K. Vogel. *Eine stereometrische Aufgabensammlung im Papyrus Graecus Vindobonensis* 19996. Mitteilungen aus der Papyrussammlung der Nationalbibliothek in Wien. I. Folge. Wien 1932. Oesterr. Staatsdruckerei. S. 11—76.

De door Gerstinger als philoloog en Vogel als mathematicus bewerkte Grieksche papyrus, die in de eerste reeks van Mededeelingen uit de Verzameling Papyri der Nationalbibliothek te Weenen de eerste publicatie vormt, bestaat uit acht brokstukken van een papyrusrol met een door talrijke penteekeningen verduidelijkte collectie stereometrische vraagstukken, waarschijnlijk afkomstig uit de eerste eeuw na Chr. De inhoud bestaat, na een aantal metrologische mededeelingen, uit 38 voorbeelden van berekeningen van inhouden in den trant van de practische boeken van Heroon (*Stereometrica* I en II, *Mensurae*); dat wil dus zeggen, dat er eenvoudig regels voor de berekeningen worden meegedeeld en toegepast, zonder dat er van afleiding eenige sprake is. De voorkomende lichamen zijn parallelepipeda, pyramiden, afgeknotte pyramiden, prismata, cylinders en afgeknotte kegels. Typeerend voor de bonte mengeling der toegepaste formules is, dat naast de ruwe Babylonische waarde 3 voor $\pi$ de correcte uitdrukkingen voor de inhouden van afgeknotte pyramiden en kegels voorkomen. Een historische merkwaardigheid is het gebruik van symbolen voor algemeene breuken (teller en noemer verticaal gerangschikt), hoewel in de berekeningen nog de Aegyptische stambreukberekening wordt toegepast. Op metrologisch gebied valt het gebruik van eenheden voor oppervlakken en inhouden op, die tot de grondeenheid dezelfde verhouding hebben als dat bij de corresponderende lengteeenheden het geval is. Men heeft b.v. een lengteeenheid voet, die 16 duimen bevat; als grondeenheid voor oppervlakken fungeert nu de vierkante voet, die ook in 16 strooken (men zou van duimstrooken kunnen spreken) wordt ingedeeld, terwijl de kubieke voet als inhoudseenheid verdeeld wordt in 16 duimlagen.

---

# BOEKBESPREKING.

---

Oscar Chisini. *Lezioni di Geometria Analitica e Proiettiva alla R. Scuola di Ingegneria di Milano.* Bologna. N. Zanichelli. 1931. VI en 489 blz.

In dit werk worden, ten behoeve van studenten eener Technische Hoogeschool, de klassieke fundamenteele deelen van de projectieve en analytische meetkunde behandeld. De schrijver is voornemens in supplementen ook de meetkundige toepassingen der infinitesimaalrekening en de vectoranalyse te bespreken. Voorzoover ik heb nagegaan, lijkt de behandeling van de stof eenvoudig en helder. Zij beperkt zich voornamelijk tot het platte vlak; uit de analytische meetkunde van de ruimte worden na de algemeene beginselen slechts de hoofdzaken van de theorie der quadratische oppervlakken onderwezen. Het werk is keurig uitgevoerd.

W. Reindersma en Dr. T. van Lohuizen, *Nieuw Leerboek der Natuurkunde. Derde Deel.* Groningen, Den Haag, Batavia (J. B. Wolters) 1931.

Het *Nieuw Leerboek der Natuurkunde* van Reindersma en van Lohuizen, waarvan de deelen I en II reeds vroeger in dit tijdschrift werden besproken, is thans met het verschijnen van het derde deel compleet. Hierin worden de stroomende electriciteit en de physische optica behandeld. Het lijkt mij toe, dat de schrijvers met dit deel het beste van hun werk geven. De wijze, waarop met de moderne opvattingen over den opbouw van de electriciteitsleer rekening is gehouden en waarop de nieuwere onderwerpen (in herdrukken van oude leerboeken vaak eenigszins als aanhangsel fungeerend) in de leerstof zijn ingelascht, verdient bewondering.

Het trekt de aandacht, dat de geschiedenis der natuurkunde (die ook voor een betrekkelijk jongen tak als de electriciteitsleer belangstelling bij de leerlingen zal kunnen wekken) in dit deel, in tegenstelling tot het eerste vooral, zoo goed als geheel wordt verwaarloosd. Te betreuren is, dat over Faraday's ontdekking der electromagnetische inductie volkomen onjuiste mededeelingen worden gedaan.

Bij de voltooiing van het werk is, ook van de zijde van iemand, die zich met de behandeling van een der onderdeelen van de stof niet heeft kunnen vereenigen, een woord van hartelijke gelukwensch en hulde aan de schrijvers op zijn plaats. Ze hebben een belangrijke bijdrage tot de verlevendiging en vernieuwing van het Nederlandsche Natuurkunde-onderwijs geleverd. E. J. Dijksterhuis.

---

# DE GELIJKZIJDIGE DRIEHOEK VAN MORLEY.

---

In vol. XXXII, 1913/14 van de Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society pag. 119 en volgende vindt men een artikel van F. Glanville Taylor en W. L. Marr, waarvan de titel is: The Six Trisectors of each of the Angles of a Triangle. Uit de aanhef blijkt, dat Prof. John Morley van Johns Hopkins University omstreeks het jaar 1900 bij een onderzoek over een ander onderwerp gevonden heeft: *If the angles of any triangle ABC be trisected, the triangle DEF, formed by the meets of pairs of trisectors, each pair being adjacent to the same side of ABC, is equilateral.* Dit vraagstuk is niet eenvoudig, zeker niet als men het zuiver meetkundig wil oplossen; met driehoeksmeting is het best te doen. Toen Dr. V e r r ij p, onze medewerker, een oplossing inzond, dacht het ons wel geschikt om eens op te sporen, welke oplossingen er al zoo in de dertig jaar, dat het vraagstuk rondwaart, zijn gegeven. We geven nu eerst het woord aan Dr. V e r r ij p, wiens inzending aanleiding was tot dit artikel.

**1.** *Men trekt de zes trisectrices van de hoeken van △ ABC. De tweetallen, welke de kleinste hoeken met een zelfde zijde vormen, geven drie snijpunten P, Q en R. Te bewijzen dat △ PQR gelijkzijdig is.*

*Bewijs.* Noemt men L, M en N de snijpunten van de tweetallen, trisectrices, die de grootste hoeken met een zelfde zijde vormen, dan merken we vooreerst op, dat LP, MQ en NR bisectrices van de hoeken BLC, CMA en ANB zijn, daar P, Q en R de middelpunten van de ingeschreven cirkels van de driehoeken BCL, CAM en ABN zijn. Verder blijkt gemakkelijk, dat de hoeken, waaronder een paar van deze bisectrices elkaar snijden, 120° en 60° zijn. Een goede figuur (zie fig. 1) doet nu *vermoeden, dat LP, MQ en NR concurrent zijn.* Neem aan, dat ze dit niet zijn en teeken den zeshoek

LRMPNQ, die zich in dit geval zou kunnen voordoen en daarin de diagonalen, dan kan het snijpunt X van LP en QM ten opzichte van

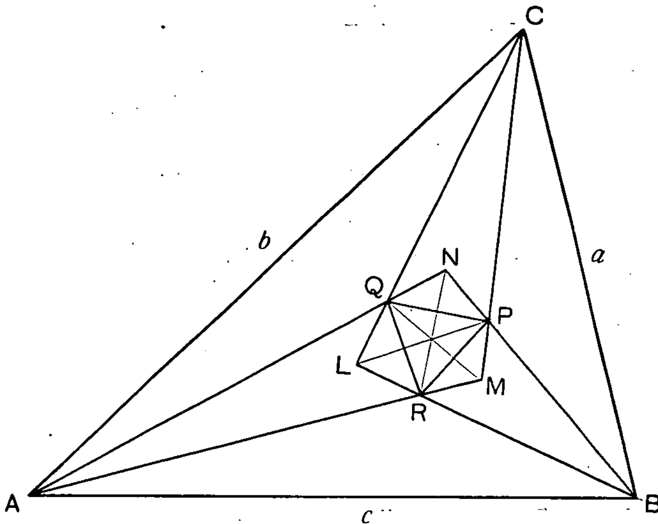



Fig. 1.

NR aan de zijde van QL, maar ook aan de zijde van PM liggen.

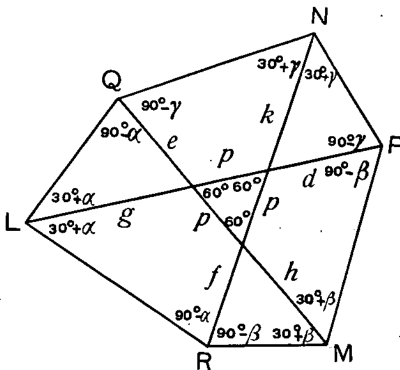



Fig. 2.

In onze teekening (zie fig. 2) kiezen we het eerste geval. Daarin zijn nu aangewezen de grootten der hoeken ($\angle A = 3\alpha$, $\angle B = 3\beta$ en $\angle C = 3\gamma$ genoemd), die de diagonalen met de zijden vormen. Verder zijn de stukken, waarin die diagonalen elkaar verdeelen, met $d$, $e$, $f$, $g$, $h$, $k$ en $p$ (driemaal) benoemd. Wegens gelijkvormigheid van driehoeken ($p \neq 0$) is dan

$$\frac{e}{g}+\frac{f}{h}+\frac{d}{k}=\frac{f+p}{g+p}+\frac{d+p}{h+p}+\frac{e+p}{k+p}=$$

$$\frac{(f+p)-e}{(g+p)-g}+\frac{(d+p)-f}{(h+p)-h}+\frac{(e+p)-d}{(k+p)-k}=\frac{3p}{p}=3\,.\,. \quad (1)$$

Toepassing van den sinusregel op de driehoeken, waarvan $e$ en $g$, $f$ en $h$, $d$ en $k$ zijden zijn, geeft echter

$$\frac{e}{g}+\frac{f}{h}+\frac{d}{k}=\frac{\sin(30^\circ+\alpha)}{\cos\alpha}+\frac{\sin(30^\circ+\beta)}{\cos\beta}+\frac{\sin(30^\circ+\gamma)}{\cos\gamma}=$$

$$=(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,.\,\mathrm{tg}\,\alpha)+(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,.\,\mathrm{tg}\,\beta)+(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,.\,\mathrm{tg}\,\gamma)=$$

$$=\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,.\,(\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta+\mathrm{tg}\,\gamma).$$

Voor de positieve hoeken $\alpha$, $\beta$ en $\gamma$, waarvan de som 60° is, geldt verder $\quad \mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta=(1-\mathrm{tg}\,\alpha\;\mathrm{tg}\,\beta)\,.\,\mathrm{tg}\,(\alpha+\beta)$,
dus nu $\quad \mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta<\mathrm{tg}\,(\alpha+\beta)$.

Maar dan is ook $\mathrm{tg}\,(\alpha+\beta)+\mathrm{tg}\,\gamma<\mathrm{tg}\,(\alpha+\beta+\gamma)$.

Uit beide laatste ongelijkheden volgt

$$\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta+\mathrm{tg}\,\gamma<\mathrm{tg}\,(\alpha+\beta+\gamma)=\mathrm{tg}\,60^\circ=\sqrt{3}.$$

Alzoo is

$$\frac{e}{g}+\frac{f}{h}+\frac{d}{k}<\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,.\sqrt{3}=3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Nu is (1) in strijd met (2), waaruit volgt — het andere geval, dat men kan teekenen, levert eveneens een ongerijmdheid — dat de onderstelling $p\neq 0$ verkeerd was. Men heeft dus $p=0$.

PL, QM en RN gaan dus door één punt O, snijden elkaar onder hoeken van 60° en verdeelen den zeshoek in drie paar congruente driehoeken, waaruit volgt: $d=e=f$ en verder $\triangle$ PQR is gelijkzijdig.

*Opmerking.* Zijn de hoeken A, B en C scherp, dan blijkt de ongelijkheid (2) eenvoudiger aldus. Men heeft nl. in $\triangle$LQX: $30^\circ+\alpha<90^\circ-\alpha$ (want $\alpha<30^\circ$), dus $\frac{e}{g}<1$. Evenzoo is $\frac{f}{h}<1$ en $\frac{d}{k}<1$, zoodat

$$\frac{e}{g}+\frac{f}{h}+\frac{d}{k}<3$$

is. Voor een rechthoekigen driehoek ABC geldt deze laatste afleiding nog met een kleine wijziging. Immers dan is b.v. $\frac{e}{g}=1, \frac{f}{h}<1, \frac{d}{k}<1$. Voor een willekeurigen driehoek kan een meetkundige afleiding van (2) wel gegeven worden, maar ze is wat omslachtig en verkapt trigonometrisch.

Tot zoover de inzending van Dr. V e r r ij p; eenige maanden, voordat deze werd ontvangen, was het vraagstuk onder mijn aandacht gekomen en opgegeven in het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde (Jg. XVIII blz. 334 nr. 3988; de oplossing vindt men in Jg. XIX blz. 45); het vraagstuk was onder het vak Driehoeksmeting opgegeven. Toevallig ontmoette ik het ook in The American Mathematical Monthly van Februari 1931 en daarin werd weer verwezen naar het nummer van November 1930; in beide nummers werd verwezen

naar boeken en tijdschriften, waarin het vraagstuk reeds werd opgelost; zoo kwam ik op de in de aanhef genoemde Proceedings. Bij elkaar hebben we nu eenige oplossingen; zuiver trigonometrische en zuiver planimetrische. Ik kan niet beter doen, dan de oplossingen te geven, zooals ze zijn met de namen van de oplossers.

**2a.** *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde XIX blz. 45;* 5 inzenders; opgenomen is de oplossing van *G. R. Veldkamp* te Groningen. Deze kan nog iets vereenvoudigd worden, b.v. door $2R = 1$ te stellen; de zijden over de hoeken A, B en C zijn dan gelijk aan $\sin A = \sin 3\alpha$, $\sin B = \sin 3\beta$ en $\sin C = \sin 3\gamma$.

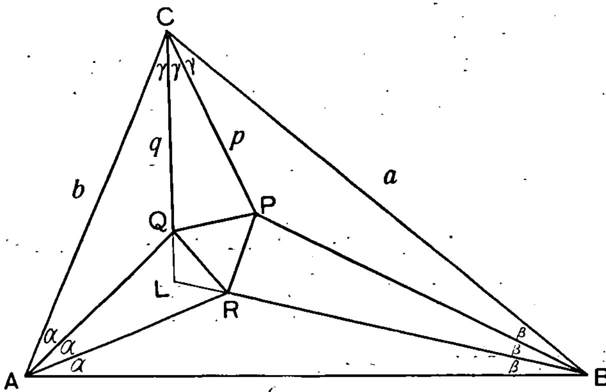



Fig. 3.

De sinusregel in $\triangle$ BCP (zie fig. 3) geeft: $p = \dfrac{\sin 3\alpha \sin \beta}{\sin(\beta + \gamma)}$.

Nu is $3\alpha + 3\beta + 3\gamma = 180°$, dus $\sin 3\alpha = \sin 3(\beta + \gamma)$; dus is $p = \dfrac{\sin 3(\beta + \gamma)}{\sin(\beta + \gamma)} \cdot \sin\beta$.

We herleiden de factor $\dfrac{\sin 3(\beta + \gamma)}{\sin(\beta + \gamma)} = 3 - 4\sin^2(\beta + \gamma) = 1 + 2\cos 2(\beta + \gamma) = 2\{\cos 60° + \cos(120° - 2\alpha)\} = 4 \sin\alpha \cos(30° - \alpha)$, zoodat $p = 4 \sin\alpha \sin\beta \cos(30° - \alpha)$ is.

Evenzoo is $q = 4 \sin\alpha \sin\beta \cos(30° - \beta)$.

In $\triangle$ CPQ geeft nu de cosinusregel:

$PQ^2 = p^2 + q^2 - 2\,pq \cos\gamma$, dus

$\frac{1}{16} PQ^2 = \sin^2\alpha \sin^2\beta.\ \{\cos^2(30° - \alpha) + \cos^2(30° - \beta) - 2\cos(30° - \alpha)\cos(30° - \beta)\cos\gamma\}$.

We herleiden de vorm, die tusschen de accoladen staat, aldus:

$\frac{1}{2}\{1 + \cos(60^\circ - 2\alpha)\} + \frac{1}{2}\{1 + \cos(60^\circ - 2\beta)\} - \{\cos\gamma + \cos(\alpha - \beta)\}\,.\cos\gamma =$
$1 + \frac{1}{2}\{\cos(60^\circ - 2\alpha) + \cos(60^\circ - 2\beta)\} - \cos^2\gamma - \cos(\alpha - \beta)\cos\gamma$; hier vallen de 2e en de 4e term weg, zoodat er overblijft $\sin^2\gamma$. Men vindt dus $\frac{1}{16}\,PQ^2 = \sin^2\alpha\,\sin^2\beta\,\sin^2\gamma$, dus $PQ = 4\sin\alpha\,\sin\beta\,\sin\gamma$. Daar deze uitkomst symmetrisch is in $\alpha$, $\beta$ en $\gamma$, blijft zij onveranderd bij cyclische verwisseling van de grootheden $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, zoodat men dezelfde uitkomst zal vinden voor QR en voor RP; $\triangle$ PQR is dus gelijkzijdig.

**2b.** *The American Mathematical Monthly* Vol. XXXVII 1930, number 9, November; pag. 493; het bewijs is van *Jacob O. Engelhardt,* Brooklyn N.Y.

De benoeming van de hoeken en punten brengen we in overeenstemming met fig. 3, terwijl we overigens het bewijs onveranderd weergeven.

De middellijn van de omcirkel van $\triangle$ ABC is weer als lengteeenheid beschouwd.

Lemma 1: $\sin 3a = 4\sin a\,\sin(60^\circ + a)\,\sin(60^\circ - a)$.
„ 2: If $a + b + c = 180^\circ$, $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1 - 2\cos a\cos b\cos c$.
„ 3: $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$.

Proof: $BP = \dfrac{\sin 3\alpha\,\sin\gamma}{\sin(\beta + \gamma)} = 4\sin\alpha\,\sin\gamma\,\sin(60^\circ + \alpha)$.

Similarly $BR = 4\sin\alpha\,\sin\gamma\,\sin(60^\circ + \gamma)$.

Therefore $RP^2 = 16\sin^2\alpha\,\sin^2\gamma\,[\sin^2(60^\circ + \alpha) + \sin^2(60^\circ + \gamma) - 2\sin(60^\circ + \alpha)\sin(60^\circ + \gamma)\cos\beta] = 16\sin^2\alpha\,\sin^2\gamma\,[\cos^2(30^\circ - \alpha) + \cos^2(30^\circ - \gamma) - 2\cos(30^\circ - \alpha)\cos(30^\circ - \gamma)\cos\beta]$.

But, by Lemma 2,
$\cos^2(30^\circ - \alpha) + \cos^2(30^\circ - \gamma) = 1 - \cos^2(180^\circ - \beta) - 2\cos(30^\circ - \alpha)\cos(30^\circ - \gamma)\cos(180^\circ - \beta) = \sin^2(180^\circ - \beta) + 2\cos(30^\circ - \alpha)\cos(30^\circ - \gamma)\cos\beta$.

Therefore $RP^2 = 16\sin^2\alpha\,\sin^2\gamma\,\sin^2(180^\circ - \beta)$ and $RP = 4\sin\alpha\,\sin\beta\,\sin\gamma$.

Similarly $PQ = 4\sin\alpha\,\sin\beta\,\sin\gamma$, $QR = 4\sin\alpha\,\sin\beta\,\sin\gamma$, and therefore $RP = PQ = QR$.

Zooals men ziet, is dit bewijs vrijwel hetzelfde als het eerste; het bekend onderstellen van de beide eerste lemma's maakt het bewijs iets korter; daar deze echter, in het bijzonder wat het eerste betreft,

niet voor de hand liggen, lijkt het ons minder gewenscht, dit te doen; het bewijs [1]) voor het eerste is: $\sin 3a = 3\cos^2 a \sin a - \sin 3a =$
$4 \sin a\,(\frac{3}{4}\cos^2 a - \frac{1}{4}\sin^2 a) =$
$4 \sin a\,(\sin^2 60^\circ \cos^2 a - \cos^2 60^\circ \sin^2 a) =$
$4 \sin a(\sin 60^\circ \cos a + \cos 60^\circ \sin a)(\sin 60^\circ \cos a - \cos 60^\circ \sin a) =$
$4 \sin a \sin (60^\circ + a) \sin (60^\circ - a)$.

Korter dan het eerste bewijs is het dus niet; geen wonder, dat anderen er in de volgende jaargang op terugkwamen; vol XXXVIII, 1931, number 2, February, pag. 96, waar we lezen: In the November, 1930 issue of this Monthly, on page 493, there appeared „A Simple Proof of the Theorem of Morley" by Mr. Jacob O. Engelhardt. Since then the editor has received the following two letters, which show different ways how that proof can be simplified. Neither one of the modified proofs involves Mr. Engelhardt's Lemma 2.

Van de beide bedoelde brieven nemen we hier alleen de tweede op, daar de eerste een wijziging aangaf, waardoor het bewijs ongeveer gelijk wordt aan een eenvoudige afleiding, die Prof. Dr. W. A. Versluys ons toezond, en welke we straks in haar geheel zullen opnemen. De tweede brief hield het volgende in:

**2c.** Arizona State Teachers College, Flagstaff, Arizona, Dec. 1930. The proof of the theorem of Morley given by Mr. Jacob O. Engelhardt can be simplified as follows:

He obtained the relation
$(RP)^2 = 16 \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma \times [\,\sin^2 (60^\circ + \alpha) + \sin^2 (60^\circ + \gamma) -$
$2 \sin (60^\circ + \alpha) \sin (60^\circ + \gamma) \cos \beta\,]$.

The expression within the brackets is equal to $\sin^2 \beta$ by virtue of the law of cosines applied to the triangle, whose angles are $\beta$, $60^\circ + \alpha$ en $60^\circ + \gamma$ and whose circumscribed circle has a radius equal to ½ (in this triangle the sides opposite these angles are respectively $\sin \beta$, $\sin (60^\circ + \alpha)$, $\sin (60^\circ + \gamma)$). Therefore

$(RP)^2 = 16 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma$ and $RP = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$. Since the expressions for PQ and QR are obtainable from the expressions for RP by permuting $\alpha$, $\beta$ en $\gamma$ and since RP is a symmetric function of $\alpha$, $\beta$ and $\gamma$, it follows that $RP = PQ = QR$.

W. C. Risselman.

---

[1]) Zie ook P. Wijdenes, Leerboek der Gonio- en Trigonometrie, 4e druk, § 114 nr. 85.

**2d.** *Goniometrisch bewijs van Prof. Dr. W. A. Versluys.*

Volgens den sinusregel is (zie fig. 3):

$$\frac{\sin \angle ARQ}{\sin \angle AQR} = \frac{AQ}{AR} = \frac{b \sin \gamma : \sin AQC}{c \sin \beta : \sin ARB} =$$

$$\frac{\sin 3\beta \sin \gamma \sin (\alpha + \beta)}{\sin 3\gamma \sin \beta \sin (\alpha + \gamma)} = \frac{(3 \sin \beta \cos^2 \beta - \sin^3 \beta) \sin \gamma \sin (60^\circ - \gamma)}{(3 \sin \gamma \cos^2 \gamma - \sin^3 \gamma) \sin \beta \sin (60^\circ - \beta)}$$

$$= \frac{(3 \cos^2 \beta - \sin^2 \beta)\ (\sqrt{3} \cos \gamma - \sin \gamma)}{(3 \cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma)\ (\sqrt{3} \cos \beta - \sin \beta)} = \frac{\sqrt{3} \cos \beta + \sin \beta}{\sqrt{3} \cos \gamma + \sin \gamma} =$$

$$\frac{\sin (60^\circ + \beta)}{\sin (60^\circ + \gamma)}.$$

Ook heeft men: $\angle ARQ + \angle AQR = 180^\circ - \alpha = 120^\circ + \beta + \gamma$, dus is $\angle ARQ = 60^\circ + \beta$ en $\angle AQR = 60^\circ + \gamma$.

Evenzoo bewijst men: $\angle BRP = 60^\circ + \alpha$ en daar $\angle ARB = 180^\circ - \alpha - \beta$ is, is $\angle PRQ = 60^\circ$. Daar men evenzoo kan bewijzen, dat $\angle PQR = 60^\circ$ is, is $\triangle PQR$ gelijkzijdig.

Zooals men ziet, komen de oplossingen, onder 2 opgenomen, vrijwel overeen; eenigszins afwijkend is de volgende.

**3.** *The Mathematical Gazette* vol XI 1922 pag. 85 (zie fig. 3).

ABC being any triangle with all its angles trisected: if the two trisectors of angle BAC intersect the adjacent trisectors of angles ABC, BCA in R en Q respectively and if BR, CQ be produced to intersect in L, then RL = QL.

$$\text{For } RL = BL - BR = BC \left\{ \frac{\sin 2\gamma}{\sin (2\beta + 2\gamma)} - \frac{\sin \alpha \sin 3\gamma}{\sin (60^\circ - \gamma) \sin 3\alpha} \right\} =$$

$$BC \left\{ \frac{\sin 2\gamma}{\sin (2\beta + 2\gamma)} - \frac{\sin \gamma (60^\circ + \gamma)}{\sin (60^\circ - \alpha) \sin (60^\circ + \alpha)} \right\} =$$

$$\frac{BC \cdot \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)} \left\{ \frac{\cos \gamma}{\cos (\beta + \gamma)} - \frac{\sin (60^\circ + \gamma)}{\sin (60^\circ + \beta + \gamma)} \right\} =$$

$$\frac{BC \cdot \sin \gamma}{\sin (\beta + \gamma)} \cdot \frac{\frac{1}{2} \sin \beta}{\cos (\beta + \gamma) \sin (60^\circ + \beta + \gamma)} =$$

$$\frac{BC \cdot \sin \beta \sin \gamma}{\sin (2\beta + 2\gamma) \sin (60^\circ + \beta + \gamma)} = QL, \text{ by symmetry.}$$

This equality (RL = QL) affords immediate proof of Prof. John Morley's theorem that „the 3 points of intersection of the adjacent trisectors of the angles of any triangle form an Equilateral Triangle".

For, if P be the third point of intersection, obviously, in the triangle BLC, LP will bisect the angle BLC and the triangles RLP, QLP will thus be equal in all respects, so that PR $=$ PQ; and similarly it can be shown that RQ $=$ PR or PQ.

C. H. Chepmell.

We komen nu tot de meetkundige bewijzen en beginnen met het

Fig. 4.

eerste van de beide bewijzen, die opgenomen zijn in de genoemde Proceedings; het is van W. E. Philip (zie fig. 4).

**4.** Let $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ stand for $\frac{1}{3}$ A, $\frac{1}{3}$ B, $\frac{1}{3}$ C, respectively, so that $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$.

The pairs of trisectors of B and C meet in D and L. Draw the incircle of LBC, centre D. Let H, K be the images of D in BL and CL. Draw the tangent KP and produce to meet BL in F; Q is the point of contact of BL.

Since DP $= \frac{1}{2}$ DK, $\therefore \angle$ PKD $= 30^\circ$, $\angle$ PDK $= 60^\circ$;

$\angle$ QDR $= 180^\circ - \angle$ L $= 2\beta + 2\gamma = 120^\circ - 2\alpha$.

$\therefore \angle$FHQ $= \angle$FDQ $= \frac{1}{2}\angle$QDP $= \frac{1}{2}(\angle$QDR $- 60^\circ) = 30^\circ - \alpha$.

Also $\angle$ DHK $= \angle$ DKH $= \frac{1}{2}\angle$ L $= 30^\circ + \alpha$,

whence $\angle$ FHK $= 2\alpha$, $\angle$ FKH $= \alpha$.

Hence $\angle$ HFK $= 180^\circ - 3\alpha = 180^\circ -$ A, and AHFK is cyclic.

$\therefore \angle$ HAF $= \angle$ HKF $= \alpha$, and AF is a trisector of $\angle$ A.

Similarly for E, the meet of CL and the tangent from H. From the symmetry of the figure DHK with respect to the circle it follows that DF $=$ DE and $\angle$ FDE is easily seen to be $60^\circ$, $\therefore \triangle$ DEF is equilateral.

**5a.** *The Mathematical Gazette* vol XI, 1922, pag. 171 (zie fig. 5).
Trisect the angles B, C; let the trisectors adjacent to BC meet in P; make ∠ BPR, ∠ CPQ respectively $60° + \gamma$ and $60° + \beta$;

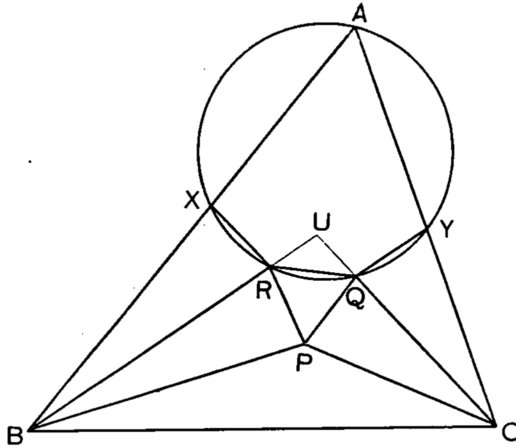



Fig. 5.

then, if PR, PQ meet the other trisectors BR, CQ in R, Q respectively, ∠ BRP $= 60° + \alpha =$ ∠ CQP and ∠ QPR $= 60°$. But, since PQ, PR are equally inclined to the sides of the triangle BUC, of which P is the incentre, it follows that PQ = PR. Hence △ PQR is equilateral.

Make BX = BP and CY = CP; then XR = RQ = QY; also ∠ XRQ $= 180° - 2\alpha =$ ∠ RQY. Therefore a circle can be described through X, R, Q, Y; and the arcs XR, RQ, QY will subtend angles $\alpha$ at the rest of the circumference, *i. e.* XRQY subtends an angle $3\alpha =$ ∠ A. Therefore A is on this circle and AR, AQ trisect angle A. J. M. Child.

**5b.** *Meetkundig bewijs van Prof. Dr. W. A. Versluys.*

Zij P het, binnen △ ABC (fig. 6) gelegen punt, waarvoor ∠ PBC $= \frac{1}{3}$∠ B en ∠ PCB = ∠ C en $Q_a$ het op BC zoodanig gelegen punt, dat ∠ $CQ_aP = 60° +$ ∠ A, dan is ∠ $CPQ_a =$ $60° + \frac{1}{3}$∠ B.

Snijdt de cirkel om P door $Q_a$ de zijde BC nogmaals in $R_a$, dan is $PQ_a = PR_a$ en ∠ $PR_aB =$ ∠ $CQ_aP = 60° + \frac{1}{3}$ ∠A, dus ∠$R_aPB = 60° + \frac{1}{3}$∠ C.

Klapt men nu △ $PCQ_a$ om PC om en △ $PBR_a$ om PB, waarbij

# HISTORISCHE BIBLIOTHEEK VOOR DE EXACTE WETENSCHAPPEN

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS

## DE ELEMENTEN VAN EUCLIDES

Deel I, 220 blz., gebonden . . . . . . . . . . f 4.50

**Deel I H. B.** *De ontwikkeling der Grieksche Wiskunde voor Euclides.*
I. Inleiding. — II. Pythagoras en de Pythagoreeërs. — III. Hippokrates van Chios. — IV. Het probleem der Continuïteit. — V. De crisis in de Grieksche wiskunde. — VI. De Phytagoreeërs volgens de hyp. van Trank. — VII. Plato. — VIII. Van Plato tot Euclides. IX. Euclides.

*De elementen van Euclides.*
I. Grondslagen. — II. De proposities 1—26. — III. De proposities 27—32. — De parallelen-theorie. — IV. De proposities 33—43. — De aequivalentie-theorie. — V. De proposities 44—48. — Aanpassing van oppervlakken en theorema van Pythagoras.

DEEL II, 287 blz., gebonden f 5.75, bij int. f 5.—.

**Deel III H. B.** *De Elementen van Euclides.*
V II. De oppervlakterekening. — VI III. De Cirkel. — VII IV. Cirkel en Driehoek. Regelmatige veelhoeken. — VIII V. De redentheorie. VIII VI. De meetkundige toepassing der redentheorie. — IX. De drie arithmetische boeken. VII–IX. — X X. Theorie der Irrationaliteiten. — XI XI. Stereometrie. — XII XII. Inhoudsbepalingen. — XIII XIII. Regelmatige veelvlakken. Appendix I. Komen in de Grieksche wiskunde irrationale getallen voor? Appendix II. Uit de geschiedenis van de termen reden (λόγος) en evenredigheid (ἀναλογία). Naamregister.

Dr. H. J. E. BETH

## INLEIDING TOT DE NIET-EUCLIDISCHE MEETKUNDE OP HISTORISCHEN GRONDSLAG

212 blz., gebonden . . . . . . . . . . f 4.50

**Deel II H. B.** I. *Voorgeschiedenis der niet-Euclidische meetkunde.*
Inleiding. — Parallelisme en aequidistantie. — Parallelisme en gelijkvormigheid. — Girolamo Saccheri. — Lambert. — Legendre.

II. *De grondleggers der niet-Euclidische meetkunde.* Lobatschefsky. — Bolyai. — Gauss.

III. *De analytische ruimteleer.* Inleiding. — Riemann. — Beltrami. — Helmholtz. — De ruimteleer van Kant en de mogelijkheid der N. E. Meetkunde.

IV. *De projectieve en groepentheoretische richting.* Inleiding. — Cayley. — Klein. Sophus Lie.

V. *De moderne axiomatica.* Inleiding. — De axioma-groepen van Hilbert. — Interpretaties van axioma- systemen.

VI. *Hyperbolische meetkunde.* VII. *Elliptische meetkunde.*

Dr. H. J. E. BETH **NEWTON'S PRINCIPIA**

I 169 blz., II 146 blz. geb. . . . . . . à f 4.25
(Voor int. op Noordhoff's Tijdschriften samen f 6.25)

**Deel IV Deel V H. B.** I. Het leven van Newton. — Het doel en de vorm van het werk. — De definities van de grondbeginselen der dynamica. — Het scholium aangaande Ruimte en Tijd. — De wetten der beweging. — De methode der eerste en laatste verhoudingen. — Over de bepaling van centrale krachten. — Over de beweging der lichamen in excentrische kegelsneden. — Nadere beschouwing der beweging onder centrale krachtwerking. — Over het rondloopen van de lijn der apsiden. — Over de beweging van lichamen, die aantrekkende krachten op elkaar uitoefenen. — Theorie van de maan. — Over de aantrekkende krachten van bolvormige en andere lichamen.

II. Het polemische karakter van Liber II. — De beweging van een stoffelijk punt bij verschillende onderstellingen omtrent de weerstand. — De fluxierekening. — De weerstand van fluida. — Het voortloopen van golven in een fluidum. — De Vortex-beweging. — De ontdekking der gravitatiewet. — De regulae phylosophandi. — Afleiding van het algemeene gravitatiebeginsel. — Verklaring van het wereldstelsel. — De afgeplatte gedaante der planeten. — Eb en vloed. — De praecessie. — De kometen. — Het Scholium generale.

**Voor inteekenaars op onze Wiskundige Tijdschriften alle deelen tegelijk besteld tijdelijk f 18.—.**

P. NOORDHOFF N.V., GRONINGEN—BATAVIA